2 Vols



Philip Earl Stanhope.

a

NOVA SECTIONUM CONICARUM ELEMENTA.

Martino, Nicolò di, 1701-1769

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM

Conscripta ad usum

FAUSTINÆ PIGNATELLI

Principis Colubranensis, & Tolvensis Ducatus Hæredis

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS.

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematum Professore

TOM. I.



Excudebat FELIX MOSCA sumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI

MDCCXXXIV.

FAUSTINÆ PIGNATELLI

Principi Colubranensi, ac Tolvensis Ducatus Hæredi.



Luribus impellor, PRINCEPS EXCELLENTISSIMA, ut nova ista Sectionum Conicarum Elementa, Nomini tuo dicata, in lucem emittam. Primum est, quod, quemadmodum jussu tuo privatim conscripta sunt; sic etiam bono publico consilio, ac

a 3 sua-

suasione tua lucem adspiciunt . Deinde, quod, si aliquem exinde fructum studiosa Juventus sit perceptura, Tibi potius ferri debet acceptus . Et denique , quod in rebus hisce adeo jam excellis , ut vix sit, qui ab invidiæ morsibus ea aptius tueri queat . Potius sortem meam singularem cunctis testandam hic reor . Nam , non eo tantum honore me cumulasti , ut in Tui commodum , & usum Elementa ista conscriberem ; sed pateris quoque , ut, dum publici juris fiunt, tuum illustre Nomen in fronte gerant . Hinc multum abest, ut publico hoc testimonio mei erga Te officii partem aliquam persolvere credam ; sed ultro fateor , novum mihi beneficium conferri , quod labor hic meus , tanto Nomine ornatus, in lucem emittatur . Id vero , PRINCEPS EXCELLENTISSIMA , generosæ tuæ indoli omnes adscribant . Neque enim quidquam in me est, quod gratiam , studiumque tuum mereatur ; sed impense mihi faves tantum , ut singularem tui Animi magnitudinem factis impleres . Quod namque quatuor ab hinc annis opera mea utaris in disciplinis addiscendis ; id potius arcto vinculo me Tibi tenet obstrictum . Primo siquidem eximiæ mihi gloriæ reputo , quod in præclaro hoc munere absque ulla hæsitatione me aliis prætulisti . Et deinde pri-

vata noſtra ſtudia neſcio cui noſtrum magis hactenus profuere. Prætereo eum Animi cultum, quem tua familiaritate me comparaſſe, omnes agnoſcunt. Et ſilentio etiam committo illam rerum agendarum peritiam, quam conſuetudine tua ſenſim acquiſiviſſe, ingenue fateor. Plane vero reticere non debeo, quantum in ipſis illis diſciplinis profecerim, quibus Tibi eram adjumento. Ubi enim ad eas ediſcendas Animum appuliſti, non ea quidem Tibi Mens erat; leviter illas, ac curioſe perluſtrare; ſed propoſitum Tibi fuit, tantum iis incumbere, quantum quiſque, vere ſciendi cupidus, iiſdem operam dabit. Hinc, ut tuis ego votis ex Animo ſatisfacerem, operæ pretium duxi, recolere eas artes, quibus a prima ætate deditus fui, ac denuo fere illas ediſcere. Quantum autem ex repetita iſta meditatione ego hauſerim fructus, ac emolumenti; Nemo certe non intelligit. Quod ſi dixerim, me eaſdem diſciplinas rurſus didiciſſe, ubi pro injuncto mihi munere Tibi illas enodabam; nihil plane dixero, quod a vero ſit alienum. Eo enim es acri judicio, tantamque habes a Natura Mentis Ἀκρίβειαν, ut lectionibus iis ediſcere ſimul, ac edocere videreris. Non itaque verebor, PRINCEPS EXCELLENTISSIMA, obſignatis hiſce tabulis, candide profite-

um, tantam esse beneficiorum molem; quæ hactenus a Te, non tam expressi, quam accepi, ut iis persolvendis omnino impar existam. Sed ea est Animi tui magnitudo, ut non minus inspicias, quid vires possint aliorum, quam quid meritis tuis debeatur. Unde, non tam de eo dolendum mihi est, quam quod nec item hæroicas tui Animi dotes, eximias omnibusque spectatas virtutes valeam pro dignitate pertexere. Etsi enim Nemini concedam, ut majore eas observantia colat, vereneturque; attamen, ut summorum in me meritorum magnitudinem sustinere non possum, sic nec ulla mihi concinna videtur oratio, quæ iis, ut par est, commendandis sufficere queat. Illa namque gravitati adspersa comitas, ac humanitas; ea Animi magnitudo, cum tanta moderatione conjuncta; summa illa in rebus agendis prudentia, ac fortitudo; omnium denique virtutum concordia, nullo vitiorum confinio polluta: plane supra omnem commendationem assurgunt, nec quisquam, utut disertissimus Orator, oratione ulla unquam complectetur. At ex altera parte gaudeo, lætorque vehementer, quod eximias tuas laudes, præclaras tui Animi dotes, nequeam, ut velim, verbis æquare. Nam, etsi esset in me tanta dicendi copia, atque

fa-

facultas, quæ iis celebrandis sufficere posset; adhuc tamen moderatio tua stylo manus injiceret, nec minus considerandum mihi esset, quid tuæ aures pati possunt, quam quid virtutes tuæ requirunt. Tantum itaque, PRINCEPS EXCELLENTISSIMA, publico isto testimonio, benignitati tuæ, tuæque erga me benevolentiæ gratias ago permaximas; nec alia sunt mea vota, meæque obsecrationes, quam, ut Te diu, & mihi, & omnibus Deus servet incolumen. Vale.

EXCELLENTIÆ TUÆ

Addictissimus Famulus
Nicolaus de Martino.

AD
LECTOREM.

NOvennium est, & quod excurrit, ex quo in commodum, & usum studiosæ nostræ Juventutis nova sectionum conicarum Elementa edere mihi proposui. Nam, sicuti experientia noveram, libros conicorum Apollonii non leve negotium Tironibus facessere; sic Elementa alia, ab aliis elucubrata, nec etiam numeris omnibus absoluta mihi videbantur.

Sed quod ab eo usque tempore mihi fuit in votis, nunc tandem, Benevole Lector, *exequi licuit; & fortasse diutius delata res esset, nisi ad ea conscribenda fato quodam speciali fuissem avocatus. Conscripsi vero illa methodo etiam nova, & plane singulari. Neque enim, ut vulgo fit, propositionibus, scholiis, & corollariis res in iis edocentur; sed continuo, & non interrupto sermone cuncta demonstrantur.*

Visum est autem, nova ista Elementa in octo libros partiri. In eorum primo agimus de ortu, & natura sectionum conicarum. Quem in finem primo quidem ostendimus, qua ratione conus oriatur, & quot modis plano secari queat. Tum genesim prosequimur earum curvarum, quæ coni sectiones dicuntur. Ad hæc docemus, quæ recta dicatur sectionis diameter, quæve item sint diametri vertices, ordinatæ, & abscissæ. Ac denique

pro-

propriam cujusque sectionis naturam relate ad diametrum aperimus.

In secundo libro agendum aggredimur de descriptione sectionum conicarum in plano. Et quoniam eas non aliter Veteres in plano describebant, quam cono rursus adhibito; ostendimus primo loco, qua ratione conicæ sectiones in plano per conum describantur. Quumque Recentiores easdem curvas, nullius solidi ope, per solas linearum longitudines describunt; subnectimus deinde, quo pacto eædem coni sectiones possint per rectas solas in plano describi.

Sequitur liber tertius, in quo de conicarum sectionum diametris aliis sermonem instituimus. Has methodo plane nova independenter a tangentibus definire conamur. Ac primo quidem earum determinationem pro qualibet sectione in medium afferimus. Tum proprietates prosequimur, quæ communes sunt diametris omnibus cujusque sectionis. Et agentes hoc loco de conjugatis diametrorum hyperbolæ; curvarum, ad quas eæ terminantur, naturam ostendimus.

Librum tertium excipit quartus, qui est de mutua diametrorum, parametrorumque comparatione. In eo autem primo quidem comparamus inter se mutuo diametros omnes cujusque sectionis. Tum parametros earundem diametrorum inter se mutuo conferimus. Et quoniam, tam circa diametros, quam circa parametros plura possunt elegantia problemata institui; visum est, horum solutionem postremo loco subjungere.

In quinto libro disserimus de tangentibus,

bus , & secantibus sectionum conicarum. Ac primo quidem proprietates ostendimus, quæ competunt tangentibus cujusque sectionis. Deinde eas prosequimur, quæ pertinent ad secantes earundem sectionum. Et quoniam asymptoti hyperbolæ considerari possunt, veluti rectæ, quæ eam contingunt in punctis extremis, seu infinite a centro distantibus; ostendimus etiam hoc loco proprietates, quæ hyperbolæ asymptotis competunt.

In sexto libro agendum nobis proponimus de focis, seu umbilicis sectionum conicarum. Proprietates autem, quæ competunt sectionibus conicis relate ad focos, seu umbilicos, sunt duplicis generis: aliæ nimirum generales, & aliæ speciales. Hinc primo quidem focorum cujusque conicæ sectionis proprietates generales ostendimus. Tum deinde eas demonstramus, quæ speciales sunt, & relate ad directricem locum sibi vindicant.

Septimus porro liber est de locis geometricis, coni sectionibus terminatis. Primo autem docemus, quid veniat nomine loci geometrici, & quot ejus species distinguantur. Deinde divisionem tradimus locorum ad lineam, & ostendimus quomodo ea construi possint. Ac denique, quia ratio construendi hujusmodi loca est duplex, utraque ratione constructionem explicamus locorum, quæ coni sectionibus terminantur.

Octavus, & ultimus liber est de constructione problematum solidorum. Pro ea vero rectius intelligenda, ostendimus primo loco, tum generatim rationem construendi problemata geometrica, cum speciatim methodum

con-

construendi problemata plana. His autem prælibatis, ipsam solidorum problematum constructionem explicandam aggredimur.

Cæterum, etsi a recepta Geometrarum methodo recedere visum sit; sedulo tamen studuimus, ut ubique claritas eluceret. Interim ab æquo Lectore illud postulamus, ut horum Elementorum lectionem non prius aggrediatur, quam ubi priores sex libros Euclidis recte didicerit. Sed aliquam solidorum cognitionem ab eo etiam exposcimus. Unde, priusquam operi manum admoveat, non male se geret, si undecimum Euclidis librum evolvat, ubi de planorum sectione disseritur.

Quæ vero ex doctrina solidorum Lectori nostro potissimum perspecta esse debent, ac explorata, ad hæc quatuor fere reducuntur. Primum est, quod, quemadmodum duæ lineæ in unico puncto se secant; sic duarum superficierum intersectio fiat in unica linea: quæ recta erit, ubi ipsæ superficies, sese invicem secantes, fuerint planæ.

Alterum est, quod si recta una sit perpendicularis duabus aliis rectis, in plano aliquo existentibus; ea ad ipsum planum pariter perpendicularis esse debeat; adeoque normaliter insistet omnibus aliis rectis, quæ in plano illo duci possunt.

Tertium est, quod si duo plana, se invicem secantia, recta fuerint ad tertium; communis eorum intersectio debeat esse perpendicularis ad utramque earum rectarum, in quibus illa eadem duo plana cum plano tertio se secant.

Et quartum denique est, quod si recta, in

pla-

plano aliquo existens, perpendicularis fuerit ad communem ejus plani cum plano altero sectionem; non aliter ipsa plana recta ad invicem esse queant, quam, si eadem illa recta subjecto plano normaliter insistat.

Ex doctrina itaque solidorum hæc quatuor potissimum nosse oportet, ut nostra ista sectionum conicarum Elementa recte intelligi possint. Et opportunum duximus, ea hic Lectori exhibere; tum, ut illa continuo ante oculos habeat; tum etiam, ut sciat, quid ipsi ex doctrina illa supponere opus sit, si priores sex libros Euclidis tantum evoluerit.

Ex prioribus autem sex libris Euclidis in primis præ manibus haberi debet doctrina proportionum, quorsum Mathesis omnis revocatur. Quem in finem Lectorem monitum volumus, quod, ut brevitati studeremus, præter Euclideas arguendi rationes, pluribus aliis usi sumus, quas, ut facile quidem erit, ex prioribus eruere, sic juvat in antecessum cognitas, ac exploratas habere.

Nimirum primo, quemadmodum per compositionem rationis confertur summa antecedentis, & consequentis cum ipso consequente; sic licebit, eandem summam conferre pariter cum antecedente, vel etiam ipsum antecedentem cum summa illa comparare.

Secundo, sicuti per divisionem rationis confertur excessus, quo antecedens superat consequentem, cum ipso consequente; sic poterit idem excessus conferri pariter cum antecedente: perinde, ac per conversionem rationis ipse antecedens cum excessu illo comparatur.

Ter-

Tertiò, si antecedens rationis minor fuerit consequente; licebit, excessum, quo vicissim consequens superat antecedentem, conferre, tam cum consequente, quam cum ipso antecedente. Nec quicquam obstabit, quominus ipse antecedens cum excessu illo pariter conferatur.

Denique, si duæ rationes fuerint æquales; erit cuique illarum pariter æqualis, tum ea, quæ oritur, addendo simul antecedentes, & consequentes; tum illa, quæ nascitur per mutuam antecedentium, & consequentium subductionem.

Familiaris etiam Lectori esse debet doctrina rationis compositæ; ac potissimum ante oculos habendum est theorema illud, quod si plures fuerint magnitudines, ratio primæ ad ultimam componatur ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, sicque deinceps, usque donec ad ultimam perveniatur.

Sane hoc theorema assumitur ab Euclide in suis Elementis absque ulla demonstratione. Ubi enim ostendendum sibi proponit, parallelogramma æquiangula habere rationem, ex lateribus compositam; utitur quidem eo theoremate, sed non aliud laudat, quam definitionem compositæ rationis, his verbis conceptam: Ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componi dicitur, quando istarum quantitates multiplicatæ efficiunt quantitatem illius.

Inde vero nolim, carpere Euclidem, quod doctrinam compositæ rationis mancam nobis exhibuerit. Crediderim potius, desiderari in

ejus

tuis Elementis definitionem aliam, quæ explicet nobis, quid per quantitatem rationis intelligi debeat. Nam, posita definitione ista, nemo non videt, præfati theorematis veritatem extra omne dubium illico poni.

Non fuisse autem omissam ab Euclide istiusmodi definitionem, sed tantum temporis injuria deperditam esse; vel exinde conjicere licet, quod absque ea nec item rationis compositæ definitio intelligi queat. Quomodo vero definita fuerit ab Euclide in sexto libro suorum Elementorum quantitas rationis; id sane omnino nos latet, & crediderim, non ita facile posse divinari.

Ut enim doctrinam proportionum, per æquemultiplices ostensam, nobis exhibuit, posuitque, duas rationes æquales esse inter se, hoc est eandem quantitatem habere, ubi antecedentium æquemultiplices, vel una superant, vel una deficiunt, vel una adæquant æquemultiplices consequentium; sic sane iisdem multiplicibus adhibitis definienda quoque erat quantitas cujusque rationis.

Verum quo pacto, ope multiplicium, rationis quantitas definienda sit; id plane non video. An non igitur neglecta Euclidæa de quantitate rationis definitio, quia nimis ardua, ac difficilis, non omnium captui erat accomodata? Neque enim novum est, ut negligant Interpretes, quod non satis assequi possunt.

ELE-

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM

INTRODUCTIO.



Uum primum ex humanioribus litteris ad arduum Philosophiæ ſtudium animum appuliſti; Ipſe ego, Faustina Princeps, auctor Tibi fui, ut planæ, ſolidæque Geometriæ Elementis illud præmunires. Jam iis cum fructu perluſtratis, non inanem Te operam ponere reor, ſi Geometriæ ſublimiori, quæ de conicis ſectionibus agit, nonnihil incumbas. Et quamquam non dubitem, quin ipſa Apollonii lectione eam addiſcere valeas; conſultius tamen exiſtimo, in Tui commodum, & uſum nova illius Elementa conſcribere.

Noſti, Geometriæ ſcopum eſſe *ſolutionem problematum, quæ circa extenſionem inſtituuntur*. Sed hæc, ut non omnia ejuſdem ſpeciei ſunt, ita nec eadem ratione poſſunt omnia ſolvi. Quæ primo Veteribus ſe obtulere, *circuli, & rectæ* interſectione ab iis ſoluta fuerunt. Quumque lineæ iſtæ in plano ſuam originem trahant, *plana* etiam illiuſmodi problemata vocitarunt. Sed alia deinceps iiſdem oblata, quorum ſolutionem earum linearum ope *fruſtra* tentarunt. Unde ad curvas alias excogi-

tandas, quibus iis ſatisfieri poſſet, animum converterunt.

Quas primo Veteres conſiderarunt, ſunt *conicæ ſectiones*, hoc eſt eæ, quæ ex coni per planum ſectione oriuntur. Sed fieri fortaſſe potuit, ut eo fuerint manuducti *natura ipſa* eorum problematum, quæ primo norunt circulum reſpuere. Nam, ſicuti conſtat, problemata iſta fuiſſe *duplicationem cubi*, *& anguli triſectionem*; ita explorata res eſt, utrumque horum problematum *natura ſua* ad conicas ſectiones pertinere. Utut vero fuerit, problemata, quæ per eas ſolvuntur, vocarunt *ſolida*; quia lineæ, iis inſervientes, ex ſolido ducunt originem ſuam.

Poſt conicas ſectiones plures alias curvas Veteres excogitarunt; & problemata, quorum conſtructioni eas adhibebant, vocarunt *linearia*. Sed extitere nonnulli, qui poſthabitis coni ſectionibus, utebantur curvis illis etiam in conſtructione problematum ſolidorum. Verum, ut ex Pappo diſcimus, ad id non aliud eos adegit, quam quia tunc temporis *difficile erat coni ſectiones in plano deſcribere*. Unde ætate noſtra, qua deſcriptio earum curvarum in plano nullam difficultatem patitur, piaculum foret, ſimile quidpiam moliri.

Qui primus inter Veteres in conicarum ſectionum contemplationem devenerit, non ſatis liquet. Sed, ſi qua fides Pappo, conſcripſit de iis quatuor libros Euclides, quos quum explevisset Apollonius Pergæus, alioſque totidem adjeciſſet, octo conicorum libri

con-

confecti. Ex his libris posteriores quatuor dumtaxat *ad abundantiorem scientiam* pertinebant. Et inde factum reor, ut græcum eorum exemplar ad nos usque non pervenerit. Enim vero istarum rerum studiosi solos quatuor priores, *disciplinæ elementa* continentes, evolvebant.

Probabile est autem, non eodem tempore libros quatuor posteriores intercidisse. Nam versiones arabicæ, quæ extant, septem priorum, argumento nobis esse possunt, octavum librum fuisse primo deperditum. Ex una harum versionum in epitomen redacta excerpsit Borellus noster libros quintum, sextum, & septimum, quos latine redditos, suisque commentariis illustratos in lucem emisit. Sed eosdem, adhibitis versionibus aliis, edidit quoque Edmundus Hallejus, quibus tum quatuor priores græce latineque, cum octavum proprio marte restitutum adjunxit.

Cæterum Apollonius inter ipsos Græcos quamplures habuit Commentatores. Præcipui vero fuerunt Pappus, & Eutocius, quorum prior lemmata in singulos libros, alter commentarios in difficiliora loca conscripsit. Et istius quidem commentarii, quum in ipso conicorum opere legerentur, mutili etiam ad nos pervenerunt. Sed Pappi lemmata nullum detrimentum injuria temporis passa sunt. Nam ea in suis collectionibus ipse Pappus inseruit, quarum etsi priores duo libri non amplius extent, extat tamen liber septimus, in quo illa ab Auctore suo inserta fuerunt.

E Græcis Apollonius confluxit ad Ara-

bes, a quibus & ſcholiis illuſtratus, & contractus etiam in epitomen. Tum Italos convenit, qui etſi eum poſtremis quatuor libris truncatum exceperint, in ejus tamen doctrina adeo profecerunt, ut non defuerit inter eos, qui libros quintum, & ſextum propriis viribus reſtituerit. Denique per omnes Europæ regiones migravit, & ubique viros ingenio, doctrinaque præſtantes comperit, qui illuſtrationi ejus certatim operam navarunt.

Verum, etſi Apollonius omni tempore fuerit excultus, & plerique ejus doctrinam nova etiam methodo enucleatam exhibuerint; adhuc tamen talia ſuorum conicorum Elementa deſiderantur, quæ tironibus proficua eſſe poſſint, & doctis etiam non improbentur. Hanc ego provinciam exornandam mihi propoſui, ex quo primum agnovi neceſſitatem iſtiuſmodi Elementorum. Sed quæ in Tui commodum, & uſum, PRINCEPS EXCELLENTISSMA, conſcribere decrevi, audacter ſe ſpes inſinuat, poſſe eorum munus obire.

In iis autem conſcribendis methodo utar plane ſingulari. Neque enim, ut paſſim fieri ſolet, propoſitionibus, ſcholiis, & corollariis Te detinebo; ſed continuo, & non interrupto ſermone tuis oculis cuncta ſubjiciam. Non inficior, hoc pacto paulo loquaciorem me eſſe oportere. Sed, quando ei medebor ſterilitati, quam recepta Geometrarum methodus parit; nemo opinor erit, qui laxiorem illam ſcribendi rationem mihi vitio vertet.

LI-

LIBER I.

De Ortu, & Natura Sectionum Conicarum.

Rerum veritatem nulli alii melius assequuntur, quam qui eas ab initio nascentes inspiciunt. Hinc, acturi de sectionibus conicis, earum primo ortum oportet contemplemur. Possunt autem hujusmodi curvæ variis, multisque modis oriri. Sed, ut jam dictum est, placuit Veteribus, eas eruere ex sectione coni facta per planum. Unde, illorum exemplo, primam earum originem nos etiam ex cono deducemus.

CAP. I.

Qua ratione oritur conus, & quot modis plano secari potest.

I. *De genesi, & speciebus coni; tum item de conis oppositis.*

1. Ut origo conicarum sectionum ex cono rectius intelligatur, ostendenda est prius genesis illius solidi, quod *conus* appellatur. Sane Euclides in suis Elementis eam universaliter non tradidit. Nam voluit oriri conum, *quando rectanguli trianguli manente uno crurum, circumducitur crus alte-*

rum, *donec redeat ad priorem locum*.

Primus Apollonius ad suam universalitatem illam evexit. Enim vero docuit conum oriri, *quando recta*, *ex sublimi*, *ac manente puncto ad circuli circumferentiam demissa*, *eam integre percurrit*. Qua ratione, prætet conum euclidæum, quem vocavit *rectum*, adeptus est conum alium, quem *obliquum*, seu *scalenum* appellavit.

Recta siquidem, quæ sublime punctum cum centro circuli conjungit, potest cum plano hujus, tam rectos, quam obliquos angulos constituere. Itaque, quum ei insistit ad rectos angulos, conus dicendus est *rectus*; ubi vero insistit ad angulos obliquos, *obliquus*, seu *scalenus* conus ipse vocandus.

In utroque autem cono recta illa, quæ conjungit sublime punctum cum centro circuli, dicitur *axis* ipsius coni. Et sicuti punctum illud sublime, quod in coni generatione manet fixum, & immotum, vocatur *vertex*; sic & planum ipsius circuli *basis* nomine insignitur.

Utrumque etiam conum liquet *in infinitum* augeri, si recta, quæ ex sublimi puncto ad circuli circumferentiam ducitur, producatur inferius in infinitum. Sed, si eadem recta extendatur quoque *superius*; tunc describetur conus alter, cujus idem erit vertex, idemque pariter axis cum cono priore.

Duos hosce conos, quum nobis usui erunt, vocabimus *oppositos*. Sed notetur sedulo velim, quod ut tali nomine duo coni designentur, haud quidem satis sit, eos eundem

ver-

verticem, eundemque axim habere; sed necesse est quoque, ut per eandem rectam ambo describantur.

II. Ex ipsa autem coni generatione ultro sequitur, *rectam, conjungentem duo puncta superficiei conicæ, esse in ipsa superficie, quum producta transit per verticem; & cadere intra superficiem, ubi ad verticem non pertinet.* II. *De positione recte, conjungentis superficiei conicæ puncta duo.*

Esto etenim conus ABC, cujus vertex sit punctum A, basis autem circulus BCD. Capiantur in ejus superficie duo puncta F, & G, quæ jungantur per rectam FG. Dico, rectam istam esse in superficie conica, quum transit producta per verticem A; & cadere intra superficiem, quum non pertinet ad verticem. Fig. 1. 2.

Si enim fieri potest, recta FG cadat in primo casu, vel intra, vel extra superficiem conicam. Et quoniam recta, quæ eam superficiem describit, revolutione sua transit per omnia puncta ejus; transibit quoque per punctum F. Quare duarum rectarum erunt iidem termini: quod fieri non potest. Fig. 1.

In secundo autem casu jungantur rectæ AF, AG, quæ quum sint in superficie conica, eædem productæ occurrent circumferentiæ basis in duobus punctis B, & C. Quare, quum recta BC sit intra circulum, erit triangulum BAC intra conicam superficiem. Est autem recta FG in plano trianguli BAC. Et igitur eadem recta FG intra conicam superficiem erit. Fig. 2.

III. Jam conus plano bifariam secari potest, primo nempe per verticem, & deinde III. *De duplici plano conum secandi ratione.*

per alium a vertice locum. Quum *conus secatur plano per verticem, fient in ejus superficie binæ lineæ rectæ*. Quotiescumque vero *planum secans per verticem non transit, tunc sectio facta in superficie coni curva linea erit*.

FIG. 2. Ut hæc ostendantur, sit rursus conus ABC, qui secetur primo plano, transeunte per verticem. Et jam, si planum istud occurrat circumferentiæ basis in punctis B, & C; junctis rectis AB, AC, erunt istæ in plano secante. Sed eædem, quum ad verticem pertineant, sunt etiam in superficie conica. Quare erunt communes sectiones plani secantis, & conicæ superficiei; proindeque, secto cono plano per verticem, fient in ejus superficie binæ lineæ rectæ.

Secetur secundo conus ABC plano, non transeunte per verticem; sitque FGH communis sectio plani secantis, & conicæ superficiei. Si fieri potest, sit vel ipsa, vel aliqua ejus portio recta, & non curva. Et quoniam ea existit in plano secante, quod per verticem non transit; utique nec etiam ipsa pertinebit ad verticem. Itaque cadet intra superficiem conicam; nec ideo erit communis sectio plani secantis, & conicæ superficiei: quod est contra hypothesim.

IV. *De sectione coni, quæ fit plano per verticem.*

IV. Quemadmodum autem, quum conus plano per verticem secatur, fiunt in ejus superficie binæ lineæ rectæ; ita *communis sectio coni cum plano, per verticem transeunte, triangulum erit*.

FIG. 2. Secetur siquidem conus ABC plano, per verticem transeunte; sintque AB, AC binæ lineæ

neæ rectæ, quæ fiunt in ejus ſuperficie. Et quoniam planum ſecans occurrit plano baſis in recta BC, liquet BAG triangulum eſſe. Eſt autem BAC communis ſectio coni cum plano. Itaque, quum conus ſecatur plano, tranſeunte per verticem, ſectio facta in cono triangulum erit.

Si planum, per quod diſpeſcitur conus, tranſeat quoque per axem; tunc recta, in qua illud occurrit plano baſis, erit iſtius diameter aliqua: proindeque triangulum per axem ſectum ſuper aliqua baſis diametro ſemper inſiſtet.

Viciſſim autem, ſi triangulum ex cono ſectum inſiſtat ſuper aliqua baſis diametro; planum ejus tranſibit per axem. Nam aliter, ducta in eo plano recta a vertice coni ad centrum baſis, forent hujus, & axis iidem termini: quod plane repugnat.

V. Planum porro conum ſecans, quum non tranſit per verticem, vel occurrit plano baſis, vel ei æquidiſtat. Quum *ſecatur conus plano, æquidiſtante baſi, ſectio circulus fiet.* Nec alterius naturæ erit, ſi non ipſe conus principalis, ſed ejus oppoſitus ea plani poſitione ſecetur. *V. De ſectione coni, quæ fit plano æquidiſtante baſi.*

Sit enim conus ABC, & vel ipſe, vel ejus oppoſitus ſecetur plano, æquidiſtante plano baſis BCD. Sit autem FGH communis ſectio coni cum plano. Dico, ſectionem iſtam circulum eſſe, ejuſque centrum reperiri in axe coni AK. Fig. 2.

Ducatur per axem planum aliud, faciens triangulum BAC. Et jam communes ſectiones

ejus

ejus cum planis æquidistantibus, nimirum rectæ BC, FG, parallelæ erunt inter se. Atque ita quoque, ducto per axem alio quovis plano DAK, parallelæ erunt rectæ DK, HL.

Hinc; quum sit, ut AK ad AL, ita BK ad FL, ita CK ad GL, & ita DK ad HL; erunt rectæ BK, CK, DK proportionales rectis FL, GL, HL; adeoque, sicuti BK, CK, DK inter se sunt æquales; sic etiam æquales erunt FL, GL, HL.

Similiter autem ostendemus, æquales inter se esse rectas omnes, quæ in sectione FGH pertinent ad punctum L. Quare sectio ipsa FGH circulus erit; ejusque centrum erit punctum L, quod reperitur in axe coni AK.

Id quum ita sit, liquet, planum basi æquidistans, non tam conum secare, quam illum restituere. Nam ea portio coni, quæ ad verticem pertinet, quum circulum pro basi habeat, adhuc conus vocari debet.

VI. *De sectione coni, quæ fit plano occurrente basi.*

VI. Quod si planum secans occurrit plano basis, tunc duo quidem contingere possunt. Nam, producto plano una cum cono, vel rursus planum ex cono egreditur, vel semper jacet intra eum. In primo casu curva, quæ gignitur in conica superficie, redibit in orbem, & spatium claudet. In secundo autem casu curva, quæ ibidem producitur, abibit in infinitum cum ipso cono.

Sed, plano intra conum continuo jacente, duo adhuc casus sunt distinguendi. Nam, producto plano superius, vel secatur quoque conus oppositus, vel ei nequaquam occurritur. Quum primum contingit, in utriusque coni

su-

ſuperficie producitur curva, quæ in infinitum extenditur. Ubi vero alterum accidit, dumtaxat in ſuperficie coni principalis curva, in infinitum progrediens, generatur.

Jam curva, quæ abit in infinitum, quum nullam aliam in adverſo cono oppoſitam habet, vocabitur *parabola*. Sed, quum ei in cono oppoſito alia adverſatur, tam ipſa, quam ejus adverſa dicetur *hyperbola*. Et denique curva illa, quæ redit in orbem, quæque producitur plano, utrinque ex cono egrediente, ſi circuli circumferentia non ſit, *ellipſis* appellabitur.

Eſt autem circumferentia circuli in unico tantum caſu, qui obtinet etiam in ſolo cono ſcaleno. Agnovit hunc caſum ipſe coni ſcaleni auctor Apollonius; & ſectionem, per quam ei ſit locus, vocavit *ſubcontrariam*. Habetur vero iſtiuſmodi ſectio, quum tam ejus planum, quam planum baſis triangulo per axem ſecto normale eſt, ex quo etiam triangula ſimilia a planis illis abſcinduntur.

VII. Et ſane, quod *ſectio coni ſcaleni ſubcontraria ſit circulus*, demonſtratur in hunc modum. Coni ſcaleni ABC ſit FGH ſectio ſubcontraria, ſitque BAC triangulum per axem ſectum, cui normale eſt, tam planum baſis BCD, quam planum ſectionis FGH. Et quoniam triangula ABC, AGF, quæ ex eo per plana iſta abſcinduntur, ut dictum eſt, debent eſſe ſimilia inter ſe; erit angulus AFG æqualis angulo ACB. VII. *De ſectione coni ſcaleni ſubcontraria.* FIG. 3.

Sumatur in recta FG, quæ communis eſt ſectio planorum BAC, FGH, punctum aliquod L, per

L, per quod agatur, tum recta MN ipsi BC parallela, cum planum MNH æquidistans plano basis BCD. Sit autem HL communis sectio planorum FGH, MNH, quæ perpendicularis erit utrique rectarum FG, MN; quum utrumque eorum planorum plano trianguli BAC normale sit.

Quoniam igitur rectæ BC, MN inter se sunt parallelæ; erit angulus ACB æqualis angulo ANM. Sed angulo ACB æqualis est angulus AFG. Quare duo anguli AFG, ANM æquales erunt inter se: & propterea, quum sit, ut FL ad ML, ita NL ad GL; erit rectangulum FLG æquale rectangulo MLN.

Ulterius, quia sectio MNH est circulus, & diametro ejus MN ducta est perpendicularis HL; erit quadratum ex HL æquale rectangulo MLN. Sed rectangula duo MLN, FLG ostensa sunt æqualia inter se. Quare idem HL quadratum erit etiam æquale rectangulo FLG.

Similiter autem ostendemus, omnem aliam rectam, quæ in sectione FGH perpendiculariter demittitur ipsi FG, posse rectangulum, sub ejusdem FG segmentis comprehensum. Et igitur ex notissima circuli proprietate sectio ipsa FGH circulus erit.

VIII. *Ex qua coni sectione oriri circulus potest.*

VIII. Quod autem, *præter sectionem parallelam, & subcontrariam, nulla alia circulum exhibeat in cono*, demonstratur hoc pacto. In cono ABC fiat sectio FGH, quæ neque sit basi parallela, neque eidem subcontraria. Et, si fieri potest, sit ea circulus.

Fig. 4. Esto MN communis sectio planorum

FGH,

FGH, BCD, ad quam per centrum circuli FGH perpendicularis demittatur FM. Tum per rectam FM, & per verticem coni agatur planum aliud, occurrens plano basis in recta BM. Denique per eundem verticem aliud adhuc planum ducatur, ipsi MN æquidistans, cujus communis sectio cum cono sit triangulum DAE.

Quoniam igitur planum trianguli DAE ductum est rectæ MN æquidistanter; communes ejus sectiones cum planis circulorum BCD, FGH, hoc est rectæ DE, HI, erunt tum ipsi MN, cum inter se adhuc parallelæ. Unde, sicuti HI, velut diametro FG perpendicularis, bisecta est in L; ita quoque DE bisecabitur in K.

Simili ratione ostendemus, bisecari a recta BC quamcumque aliam, quæ in circulo BCD ducitur ipsi MN æquidistanter. Quare recta BC erit diameter circuli BCD; & consequenter planum ABM transibit per axem ipsius coni; eritque adeo triangulum BAC ex cono sectum per axem.

Ulterius, quum recta BC sit diameter circuli BCD, ea non modo bifariam, verum etiam ad rectos angulos secabit aliam DE. Est autem DE parallela ipsi MN. Quare huic MN normalis erit utraque ipsarum FM, BM: proindeque triangulum per axem sectum BAC rectum erit ad basim BCD; & propter parallelas MN, HI, erit pariter rectum ad planum sectionis FGH.

Denique per punctum K ducatur recta OR ipsi FG parallela. Et quoniam in eadem

ra-

ratione rectarum AK, AL est, tum OK ad FL, cum RK ad GL; erit rectangulum OKR ad rectangulum FLG, ut est AK quadratum ad AL quadratum. Sed AK quadratum est ad AL quadratum, ut DK quadratum ad HL quadratum; sive etiam, propter circulos BCD, FGH, ut rectangulum BKC ad idem rectangulum FLG. Quare erit rectangulum OKR æquale rectangulo BKC.

Hinc, quum sit, ut OK ad BK, ita CK ad RK; erit angulus OBK æqualis angulo GRK, sive AGL; atque adeo triangulum ABC simile erit triangulo AGF. Unde, quum triangulo per axem secto BAC rectum sit, tam planum basis BCD, quam planum sectionis FGH; & ex eo insuper per plana ista abscindantur triangula similia ABC, AGF: sectio FGH subcontraria erit: quod est contra hypothesim.

CAP. II.

Quæ curvæ sectionum conicarum nomine veniunt, & quæ sit earum origo.

I. *Epilogus eorum, quæ præcedenti capite ostensa sunt.*

I. IN præcedenti capite, post traditam coni generationem, expositi sunt modi omnes, quibus plano conus secari potest. Et vidimus, quod sicuti, secto cono plano per verticem, fiunt in ejus superficie bi-

næ

næ lineæ rectæ; *ita*, quum conus secatur plano, per verticem non transeunte, sectio orta in eadem superficie sit linea undique curva. Novimus porro, curvam istam esse circumferentiam circuli, quum sectio, vel est basi æquidistans, vel eidem subcontraria; esse vero alterius a circumferentia circuli naturæ, quum planum secans alia ratione ad planum basis inclinatur.

Sed hanc aliam curvam, a circuli circumferentia diversam, triplicis etiam speciei esse posse, nobis innotuit. Nam, vel in orbem redit, spatiumq; comprehendit ad instar ipsius circuli circumferentiæ; & vocavimus eam *ellipsim*. Vel extenditur in infinitum, nullamque aliam in adverso cono sibi oppositam habet; & *parabolæ* ei nomen imposuimus. Vel denique abit quidem in infinitum, sed ei in opposito cono curva alia adversatur; & tum ipsam, cum ejus adversam *hyperbolæ* nomine designavimus.

II. Jam nomine *sectionum conicarum* hujusmodi tres curvas Veteres intelligebant. Circuli enim circumferentia, etsi ex cono etiam eruatur, eo tamen vocabulo minime ab iis fuit insignita. Id vero non absque consilio factum a Veteribus reor; nimirum, ut ea ratione cunctis indicarent, non debere circumferentiam circuli ex cono deduci. Coni etenim genesis, ut superius vidimus, præexistentem circulum supponit. Unde, si circuli circumferentia ex cono esset deducenda, jam in eam impingeretur labem, quam vitiosum circulum vulgus appellat.

II. *Quæ curvæ veniant nomine sectionum conicarum.*

Qua

Qua autem ratione *parabola*, *hyperbola*, & *ellipsis* ex cono trahant originem suam, jam superius innuimus. Nimirum oritur in cono *parabola*, quum planum, per quod dispescitur conus, jacet semper intra conum, nec superius productum conum secat adversum. Oritur vero *hyperbola*, quum idem planum jacet quidem continuo intra conum, sed sursum productum secat etiam conum oppositum, ubi *hyperbolam* aliam creat. Et denique oritur *ellipsis*, quum planum secans utrinque egreditur ex cono, sed sectio nec est basi æquidistans, nec eidem subcontraria.

III. *Euclidaea genesis earum curvarum explicatur.*

III. Interim Euclides, & Apollonius in eruendis curvis istis ex cono triangulum per axem sectum velut *regulam* adhibebant. Sed rem non eadem ratione ambo exposuerunt. Euclides siquidem, non aliter conum plano secabat, quam ut *uni laterum ejus trianguli ad rectos angulos occurreret*. Unde, quia dumtaxat conum rectum agnovit, in quo omnia triangula per axem secta sunt isoscelia, & æquales in vertice angulos habent; ex uno, eodemque cono curvas illas omnes eruere nequibat, sed pro unaquaque illarum peculiari quodam cono ei opus erat.

Nimirum, etsi conus euclidæus oriatur, quando rectanguli trianguli manente uno crurum, circumducitur crus alterum, usque donec ad priorem suum locum revertatur; possunt tamen ejus coni tres *species* distingui, *prout crus manens est æquale, minus, vel majus crure circumducto*. Pro triplici enim hoc

casu, triangulum, sectum ex cono plano per axem, potest in vertice, tum rectum, tum obtusum, tum acutum angulum habere. Unde, habita ejus anguli ratione, poterit ipse conus, modo *rectangulus*, modo *obtusangulus*, modo demum *acutangulus* appellari.

Ad eruendam ergo *parabolam*, utebatur Euclides cono *rectangulo*. Nam in eo triangulum, per axem sectum, habet in vertice angulum rectum; adeoque planum, uni ejus lateri ad rectos angulos occurrens, jacebit semper intra conum, nec secabit ejus oppositum. Vicissim autem, ad eruendam *hyperbolam*, adhibebat conum *obtusangulum*; quia, ratione anguli obtusi, in trianguli vertice existentis, idem planum jacebit quidem continuo intra conum, sed secabit ejus adversum. Et denique, ad deducendam *ellipsim*, in subsidium advocabat conum *acutangulum*; quia, propter angulum acutum, existentem in vertice trianguli, prædictum planum rursus ex cono egredietur.

IV. *Ostenditur earundem curvarum genesis apolloniana.*

IV. Hæc igitur erat trium illarum curvarum euclidæa genesis ex cono. Sed novit Apollonius, posse illiusmodi curvas *indiscriminatim* ex omni cono deduci, si planum, per quod dispescitur conus, non ita duceretur, ut uni laterum trianguli, per axem secti, ad rectos angulos insisteret; sed subinde, ut *occurreret plano basis, aut alterius circuli paralleli in recta, quæ normalis esset ad basim ejus trianguli*.

Sit itaque conus ABC, & in eo plano per axem fiat triangulum BAC. Secetur deinde idem conus plano alio, occurrente plano ba- Fig. 5. 6. 7.

sis, aut alterius circuli paralleli BCD in recta DE, quæ perpendicularis sit ad basim ejus trianguli BC; sitque DFE sectio, facta in superficie conica per hoc aliud planum. Ostendendum est, sectionem istam posse unamquamque earum curvarum nobis exhibere.

Sit recta FG communis sectio planorum BAC, DFE. Hanc liquet esse posse; vel lateri AC parallelam; vel subinde ad illud inclinatam, ut ei supra coni verticem occurrat; vel demum taliter ad illud annuentem, ut infra coni verticem cum eo conveniat. In primo casu sectio DFE erit *parabola*; in secundo erit *hyperbola*; ac demum in tertio casu eadem sectio erit *ellipsis*.

Ut hæc ostendantur, ducatur per latus AC planum, quod occurrat plano circuli BCD in recta CZ, ipsi DE parallela. Et quoniam recta DE posita est perpendicularis ad diametrum circuli BC, erit recta CZ eidem BC similiter perpendicularis. Continget ergo recta CZ circumferentiam circuli BCD in puncto C. Unde ipsum quoque planum tanget conicam superficiem in latere AC; & productum superius, continget etiam superficiem oppositi coni, in quam latus AC, quum sursum producitur, cadit.

Jam, quum recta FG parallela est lateri AC; erit planum DFE æquidistans quoque plano contactus. Unde, sicuti cum eo convenire non potest, ita jacebit semper intra conum, nec secabit ejus oppositum: proindeque sectio DFE *parabola* erit. Quotiescumque vero recta FG occurrit lateri AC supra verti-

cem;

cem ; tunc planum DFE etiam supra verticem conveniet cum plano contactus : adeoque, quum secet conum oppositum, sectio DFE erit *hyperbola*. Denique, quum recta FG occurrit lateri AC infra verticem ; planum DFE conveniet cum plano contactus similiter infra verticem : proindeque, quum rursus ex cono egrediatur, sectio DFE erit *ellipsis*.

V. Verum quidem est, quod in ducendo plano sectionis etiam Apollonius hanc legem adhibuerit, ut occurreret plano basis, aut alterius circuli paralleli in recta, quæ normalis esset ad basim trianguli, per axem secti. Nihilominus ad legem istam omnes, quæ in cono fiunt, sectiones exigi possunt; quia, quomodocumque planum, per quod dispescitur conus, occurrat plano basis, aut alterius circuli paralleli, semper exhiberi potest in cono triangulum per axem, ad cujus basim recta illius occursus perpendiculariter insistat. *V. Apolloniana genesis sectionum conicarum nulla exceptione laborat.*

Secetur etenim conus ABC plano aliquo, occurrente plano basis, aut alterius circuli paralleli BCD in recta DE. Jam nihil obstat, quominus in circulo BCD talis diameter ducatur, quæ ipsi DE ad rectos angulos occurrat. Satis siquidem erit, ex centro ipsius circuli perpendicularem demittere super DE, eamque producere, usque donec utrinque circumferentiam secet. Sit igitur BC diameter ista. Et triangulum, per axem sectum, quod ei insistit, illud erit, quod quæritur. Nam ex ipsa constructione basi ejus BC perpendicularis est recta DE, in qua planum sectionis DFE occurrit plano circuli BCD. FIG. 5. 6. 7.

Ratio igitur eruendi tres illas curvas ex cono, quam tradidit Apollonius, *nulla exceptione laborat*. Nam, ficuti por eam præfatæ tres curvæ possunt ex quolibet cono deduci; ita omnis sectio, quæ aliquam ex iis curvis in conica superficie producit, velut ea ratione facta potest haberi. Unde etiam genesis earum curvarum apolloniana, *universalitate sua*, non modo euclidæam, sed omnem aliam, quæ fingi excogitarique potest, vincit ac superat; quandoquidem universalissima illa, a plani intra conum positione deducta, quam posuimus ab initio, ad ipsam revocatur.

VI. *Euclidæa methodo tres illæ curvæ nec etiam ex eodem cono scaleno erui possunt.*

VI. Sed nolim hic reticere, quod juxta methodum euclidæam nec etiam ex uno, eodemque cono scaleno tres illæ curvæ erui queant. Etsi enim in cono isto triangula, per axem secta, non habeant semper æquales angulos in vertice; sunt tamen anguli illi ejusdem semper speciei inter se, hoc est, vel omnes recti, vel omnes obtusi, vel omnes acuti. Unde, si planum secans uni laterum trianguli, per axem secti, ad rectos angulos occurrere deberet; adhuc alio cono opus esset ad eruendam parabolam, alio ad derivandam hyperbolam, & alio demum ad deducendam ellipsim.

FIG. 3. Sit enim conus scalenus ABC, ex quo abscindatur plano per axem triangulum aliquod BAC. In plano hujus trianguli describatur semicirculus, cujus diameter sit recta BC. Et perspicuum est, punctum A locari in ejus circumferentia, quum axis coni adæquat basis semidiametrum; intra circumferentiam, quum axis coni est minor semidiametro basis;

ac

ac demum extra circumferentiam, quum idem axis est major eadem semidiametro. Quare ipsius trianguli angulus verticalis erit rectus in primo casu, obtusus in secundo, tandemque acutus in tertio.

Hæc autem quum ita sint, liquet, conum scalenum, perinde ac rectum, esse, vel *rectangulum*, vel *obtusangulum*, vel denique *acutangulum*. Quotiescumque enim axis coni scaleni basis suæ semidiametrum adæquat, conus erit *rectangulus*; quia quodlibet triangulum, per axem sectum, habet in vertice angulum rectum. Ubi vero axis coni scaleni est minor semidiametro basis, conus erit *obtusangulus*; quia in vertice cujusque trianguli, per axem secti, reperitur angulus obtusus. Et denique, quum axis coni scaleni est major semidiametro basis, conus erit *acutangulus*: ob acutum angulum, quem triangula, per axem secta, in vertice habent.

VII. *Sectionum conicarum nomina euclidea, & cur ab iis recesserit Apollonius.*

VII. Recte igitur observavit Eutocius, quod in tradenda genesi earum curvarum contigerit Veteribus illud idem, quod evenit eis in ea trianguli proprietate, quod *omnes anguli simul duobus rectis sint æquales*. Nam, sicuti proprietatem istam primo norunt in triangulo æquilatero, tum in isosceli, ac postea in scaleno: unde demum conflatum ab iis universale theorema, omnes triangulorum species comprehendens; ita quoque tres illas curvas ex totidem coni recti speciebus primum eruebant: & nonnisi post tempora Apollonii, tum ex quolibet cono recto, cum etiam ex cono scaleno eas deduxerunt.

Cæterum Apollonio, non modo universalis earum curvarum genesis, sed nomina quoque, quibus eas designamus, ferri debent accepta. Euclides enim ab ipsis conis, unde illas eruebat, primam vocavit *sectionem coni rectanguli*, alteram *sectionem coni obtusanguli*, & tertiam demum *sectionem coni acutanguli*: hisque nominibus ad Apollonium usque, cum Archimedes, tum alii subsecuti Geometræ curvas illas vocitarunt.

Sed nominibus istis non amplius a se mutuo poterant eæ curvæ distingui, ubi novit Apollonius, posse unamquamque illarum ex quocumque cono deduci. Unde, iis abdicatis, operæ pretium duxit Geometra summus, alia curvis illis nomina imponere, quæ apta essent iis a se invicem distinguendis. Itaque, a præcipuis ipsarum proprietatibus, quas suo loco inferius ostendemus, *parabolam*, *hyperbolam*, & *ellipsim* eas appellavit.

C A P. III.

De diametro sectionum conicarum, deq; ejus verticibus, ordinatis, & abscissis.

I. *Quæ recta diameter cujusvis conicæ sectionis appellatur.*

I. Cujuscumque speciei sit sectio conica, si fiat in cono triangulum illud per axem, ad quod eam apolloniana genesis exigit, dicetur *diameter* sectionis recta illa, quæ est communis sectio ejus trianguli, & plani secantis. Ita,

Ita, si DFE sit sectio facta, in superficie conica per planum, occurrens plano basis, aut circuli æquidistantis BCD in recta DE; & BAC sit triangulum, per axem sectum, ad cujus basim BC normalis est recta DE: vocabimus *diametrum* sectionis DFE rectam FG, in qua duo plana BAC, DFE sese mutuo secant. Fig. 5. 6. 7.

Jam vidimus præcedenti capite, rectam istam FG esse lateri AC parallelam, quum sectio DFE est parabola; ei occurrere supra verticem coni, quum sectio DFE est hyperbola; ac demum illud infra coni verticem secare, quum eadem sectio DFE est ellipsis. Unde, habita diametri ratione, tres illæ conicæ sectiones poterunt sequenti modo definiri.

Nimirum parabola est conica sectio, in qua diameter uni laterum trianguli, per axem secti, est parallela. Hyperbola est sectio conica, in qua diameter unum quidem trianguli latus infra verticem coni, & alterum supra verticem secat. Ac demum ellipsis est conica sectio, in qua diameter utrique laterum trianguli infra coni verticem occurrit.

II. *Cur recta illa tali nomine vocetur, ostenditur.*

II. Dabimus autem rectæ FG nomen *diametri*, quia transit velut per medium ipsius sectionis. Ut enim ex constructione bisecat in K rectam DE, ita quoque dividit bifariam rectas omnes, quæ ipsi DE æquidistantes, utrinque ad sectionem terminantur. Fig. 5. 6. 7.

Sit namque HI una istarum rectarum. Ostendendum est, eam a recta FG secari bifariam in L. Ducatur per punctum L recta MN, ipsi BC parallela. Jamque huic MN erit HI

perinde normalis, ac est DE perpendicularis super BC.

Et quoniam, secto cono plano, transeunte per rectas MN, HI, oritur circulus MNH, cujus diameter est recta MN; eadem HI, non modo insistet ad angulos rectos super MN, sed bifariam quoque ab ipsa secabitur. Quare etiam a recta FG bisecta erit in L.

Patet autem, eandem demonstrationem obtinere etiam, si sectio DFE sit hyperbola, & recta HI ducta sit in ejus opposita æquidistanter ipsi DE. Quocirca recta FG erit utriusque hyperbolæ diameter, & in utraque dividet bifariam rectas omnes, quæ ipsi DE æquidistantes, utrinque ad sectionem terminantur.

III. *Diametri accidentalis quadam proprietas adnotatur.* Fig. 5. 6. 7.

III. Sed nolim hic reticere, quod si triangulum per axem BAC rectum fuerit plano circuli BCD; tunc recta illa FG, quam sectionis *diametrum* appellamus, non modo bifariam, verum etiam ad angulos rectos secabit, cum rectam DE, tum alias omnes, quæ ipsi DE æquidistantes, utrinque ad sectionem terminantur.

Ex constructione enim ad rectam BC, quæ communis est sectio duorum planorum BCD, BAC, perpendicularis est ipsa DE. Itaque, quum duo illa plana sibi mutuo occurrunt ad rectos angulos, quemadmodum DE existit in uno eorum planorum BCD, ita perpendicularis erit ad planum alterum BAC. Sed recta FG, velut communis sectio planorum BAC, DFE, reperitur in plano BAC. Quare erit DE perpendicularis quoque ipsi FG: & propterea, non modo bifariam, sed

etiam

etiam ad angulos rectos ab ea secabitur.

Et quidem, quum conus est rectus, proprietas ista diametri semper locum habet; quia in cono recto triangulum, per axem sectum, plano basis, aut circuli æquidistantis semper ad rectos angulos insistit. Sed longe secus se res habet in cono scaleno; quandoquidem in eo triangulum, per axem sectum, tunc demum rectum est ad planum basis, aut circuli æquidistantis, quum perpendicularis, demissa ad planum illud ex vertice coni, est in ipso trianguli plano.

IV. Quemadmodum autem recta FG, quæ communis est sectio plani secantis, & trianguli per axem, vocabitur in posterum *diameter* sectionis DEE; ita punctum F, in quo eadem FG sectioni occurrit, diametri *vertex* appellabitur. Sed semisses earum rectarum, quæ bifariam a diametro dividuntur, quum nobis usui erunt, diametri *ordinatæ* dicentur. Et denique eæ diametri portiones, quæ vertice, & ordinatis continentur, ubi nobis inservient, non alio, quam *abscissarum* nomine, distinguentur.

IV. *Diametri vertices, ordinata, & abscissa definiuntur.* FIG. 5. 6. 7.

Quum ellipsis in orbem redeat, occurret ei diameter in duobus punctis; atque adeo duo erunt *vertices* ipsius. Similiter autem in hyperbola, ob aliam oppositam, quæ continuo illam comitatur, duo erunt diametri *vertices*. Sed, quemadmodum in ellipsi diameter non majorem *longitudinem* habere potest, quam quæ ei ab utroque vertice conceditur; sic etiam in hyperbola, ubi quæstio erit de *longitudine* diametri, ea tantum ipsius por-

tio veniet, quæ utroque vertice continetur.

Tantum igitur in parabola, ob unicum diametri verticem, nequit ei *longitudo* ulla præfiniri. Verum, si intimius rem inspicere velimus, comperiemus in hac curva verticem alium in infinita a priore distantia: unde ipsa ejus diameter velut *infinitæ longitudinis* erit habenda. Neque enim alia ratione, tam in ellipsi, quam in hyperbola sortitur diameter FG verticem alium, quam quia in utraque curva occurrit etiam lateri AC. At quicumque novit, *rectas parallelas velut occurrentes in infinita distantia posse considerari*; facile intelliget, hunc alium occursum fieri in parabola, ubi a puncto F infinite receditur.

V. *Qua ratione parabola ad ellipsim, & hyperbolam reducatur.* Fig. 6. 7.

V. Et sane, *tam ellipsis, quam hyperbola vertitur in parabolam*, quum altero diametri vertice G in infinitum abeunte, fit ipsa diameter FG infinitæ longitudinis. Neque enim punctum G in infinitum abire potest, nisi diameter FG æquidistans fiat lateri AC. Id vero quum accidit, omnino necesse est, ut sectio DFE evadat parabola. Nam, ut superius vidimus, parabola est conica sectio, in qua diameter uni laterum trianguli, per axem secti, est parallela.

Hinc *considerari poterit parabola, tam ut ellipsis, quam ut hyperbola, cujus diameter sit infinitæ longitudinis*. Et vel hac sola consideratione poterunt parabolæ proprietates omnes ex iis derivari, quæ sive ad ellipsim, sive ad hyperbolam pertinent. Nimirum, si sedulo perpendatur, quid in ea, de qua agitur, proprietate infinita diametri longitudo mutet, ac innovet.

Pla-

Plane vero non patitur ratio Elementorum, ut in demonstrandis parabolæ proprietatibus hæc methodus usurpetur. Sed, ubi propriis suis rationibus proprietates illæ sunt comprobatæ; volupe erit, easdem hac alia methodo rursus experiri. Hinc in nostris hisce Elementis parabola post ellipsim, & hyperbolam semper sub contemplationem veniet; ut scilicet ejus accidentia ex proprietatibus ellipsis, & hyperbolæ eruere etiam valeamus.

VI. Quemadmodum autem *ellipsis vertitur in parabolam*, quum altero diametri vertice G in infinitum abeunte, fit diameter ipsa infinitæ longitudinis, & consequenter parallela lateri AC; sic *eadem ellipsis transit in circulum*, quum abeunte in infinitum puncto K, in quo rectæ duæ FG, BC sibi mutuo occurrunt, evadit diameter FG parallela ipsi BC.

VI. *Etiam circulus velut species quædam ellipsis potest haberi.* FIG. 7.

Nam in isto casu una cum puncto K abibit etiam in infinitum recta DE, quæ communis est sectio plani secantis cum plano basis. Unde, quum duo ista plana conveniant inter se in infinita distantia, ipsa quoque evadent parallela. Hinc secabitur conus plano, æquidistante basi: & propterea, ex superius ostensis, ipsa sectio circulus erit.

Id quum ita sit, *poterit circulus velut species quædam ellipsis haberi.* Et revera, prout ex cono oritur, est prima infinitarum variationum, quas in eo subit ellipsis. Sicuti enim, secto cono plano, æquidistante basi, producitur circulus; sic, inclinato paululum plano versus basim, fit statim locus ellipsi, cujus, pro infinitis inclinationibus diversis plani secantis,

in-

infinita quoque diversitas extat.

Ultima autem infinitarum variationum, quas in cono patitur ellipsis, parabola est; ut quæ contingit, quum planum secans non amplius egreditur ex cono. Sed parabola est etiam prima ex infinitis variationibus, quibus in cono subjacet hyperbola; quippe quæ confestim eam subsequuntur. Quumque demum hyperbola desinat in lineam rectam; hæc quoque velut ultima hyperbolarum poterit considerari.

VII. *Omnis recta, quæ ex cono eruitur, potest ad hyperbolam revocari.*

VII. Interim *linea recta, quæ ex cono eruitur, quandoque est simplex & unica, quandoque vero geminata.* Ad eam quippe eruendam, semper plano, per verticem transeunte, opus est. Sed, ubi planum istud contingit superficiem conicam; recta erit simplex, ac unica. Ubi vero eam partitur, & secat; recta non simplex, sed geminata orietur.

Et ne aliquid prætereamus, quod scitu sit dignum, notetur hic velim, quod sicuti recta illa simplex, quæ oritur per planum, conicam superficiem contingens, habenda est velut ultima infinitarum variationum, quas in cono subit hyperbola; ita recta illa geminata, quæ gignitur, secando conum plano per verticem, considerari poterit velut hyperbola, cujus diameter sit nullius prorsus longitudinis.

Jam enim vidimus superius, quod quum diameter hyperbolæ sit infinitæ longitudinis, hyperbola ipsa vertatur in parabolam, & ejus opposita abeat in infinitum, nec amplius extet. At, *si eadem hyperbolæ diameter minuatur,*

tur in infinitum, & prorsus evanescat; tunc binæ hyperbolæ oppositæ accedent ad se mutuo, & vertentur in rectas duas, se invicem decussantes in vertice coni; quum non alia ratione abire possit in nihilum diameter hyperbolæ, quam plano sectionis per coni verticem transeunte.

VIII. Cæterum, priusquam huic capiti finem imponamus, juvat advertere, quod sicuti hyperbolarum oppositarum eadem est diameter, *sic in utraque hyperbola eadem quoque sit positio earum rectarum, quæ diametri ordinatæ dicuntur*.

VIII. *In hyperbolis oppositis, sicut eadem est diameter, ita eadem est positio ordinatarum.*

Monuimus namque superius, quod recta FG bifariam dividit, non solum eas omnes, quæ in hyperbola DFE ducuntur æquidistanter ipsi DE; verum etiam quotquot in hyperbola opposita eidem DE sunt parallelæ. Quare, non modo FG erit diameter utriusque hyperbolæ, sed ordinatæ, quæ pertinent ad hanc diametrum, erunt in utraque hyperbola parallelelæ rectæ DE. FIG. 6.

Clarius autem constabit veritas hujus rei, si in cono opposito plano, æquidistante basi ipsius coni principalis, circulus fiat; tum quæratur triangulum per axem, quod dirigat sectionem, factam in illo cono. Etenim, quum oriatur triangulum istud, producendo latera trianguli BAC, quod in cono principali dirigit sectionem DFE; liquido patebit, eandem esse diametrum hyperbolarum oppositarum, & eandem esse pariter in utraque positionem ordinatarum.

CAP.

C A P. IV.

Quæ sit natura ellipsis relate ad diametrum, definitur.

I. Ellipsis relate ad diametrum proprietas prima.

I. OStensa genesi sectionum conicarum; sequitur, ut propriam cujusque naturam relate ad diametrum definiamus. Primo igitur in ellipsi, *si binæ ad diametrum ordinatæ ducantur, erunt earum quadrata inter se, ut rectangula, quæ sub correspondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice sumptis, continentur.*

Fig. 7. Fiat enim in cono ABC sectio elliptica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ utrique laterum trianguli, per axem secti, infra coni verticem occurrit, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Ostendendum est, DK quadratum esse ad HL quadratum, ut est rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

In eodem cono fiant etiam circuli duo BCD, MNH per plana, basi æquidistantia. Et quoniam eorum diametris BC, MN insistunt ad rectos angulos rectæ DK, HL; erunt istarum quadrata æqualia rectangulis BKC, MLN. Quare erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN.

Jam ratio horum rectangulorum componitur ex BK ad ML, & ex CK ad NL; sive etiam ex FK ad FL, & ex GK ad GL. Sed

duæ

duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Itaque erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

II. Hinc, si ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ sit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK sit ad rectangulum ei correspondens FKG, veluti est ipsa FO ad diametrum FG; erit quadratum cujusvis alterius ordinatæ HL ad rectangulum FLG, quod illi correspondet, similiter ut FO ad FG. II. *Proprietas secunda, diametri parametrum exhibens.* Fig. 7.

Ostensum est enim, DK quadratum esse ad HL quadratum, ut est rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Quare erit permutando, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita HL quadratum ad rectangulum FLG. Ponitur autem, DK quadratum esse ad rectangulum FKG, ut est FO ad FG. Et igitur ex æquali HL quadratum ad rectangulum FLG erit etiam, ut FO ad FG.

Recta ista FO diametri *parameter* deinceps appellabitur; & rectangulum, sub ipsa, & diametro contentum, diametri *figura* dicetur. Ejus autem habita ratione, perspicuum est, id quidem ellipsi contingere, ut *quadratum cujusvis ordinatæ sit ad rectangulum, quod sub correspondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice sumptis, continetur, in eadem illa ratione, quam parameter ad diametrum habet.*

III. Maneat jam parameter FO ordinatis diametri parallela, in qua utique positione III. *Proprietas tertia, illi-*

sem-

ipsius denominationem ostendens. semper ea intelligi debet. Jungatur alia ejus extremitas O cum vertice altero G per rectam

FIG. 7. GO, cui occurrat in R ordinata quævis DK. Et quadratum ordinatæ hujus DK æquale erit correspondenti rectangulo FKR.

Nam rectangulum FKR est ad rectangulum FKG, ut KR ad KG. Sed KR est ad KG, ut FO ad FG, sive etiam, ut DK quadratum ad rectangulum FKG. Itaque erit ex æquali, ut rectangulum FKR ad rectangulum FKG, ita DK quadratum ad idem rectangulum FKG: & propterea DK quadratum, & rectangulum FKR æqualia erunt inter se.

Perspicuum est autem, rectangulum FKR minus esse rectangulo OFK. Quare quadratum ordinatæ DK ab eodem rectangulo OFK pariter deficiet. Hinc sortita est hujusmodi conica sectio nomen *ellipsis*; quia in ea *quadratum cujusvis ordinatæ a rectangulo, quod fit ex parametro in abscissam correspondentem, continuo deficit*.

Defectus vero est rectangulum aliud, quod insistens eidem abscissæ, est simile, similiterque positum ei, quod diametri figuram constituit. Nam, ducta RS, ipsi FG parallela, erit relate ad quadratum ipsius DK rectangulum OSR istiusmodi defectus: quod quidem ipsi RS, seu FK insistit; & est simile, similiterque positum ei, quod fit ex FO in FG; quum sit circa diagonalem illius.

IV. Ratio parametri ad diametrum per rectas, in IV. Cæterum *ratio, quam habet in ellipsi parameter ad diametrum, potest per rectas, in cono ductas, facili negotio definiri*. Positis enim omnibus ut supra, si ducatur ex vertice coni

A re-

A recta AX, ipsi FG parallela, quæ conveniat cum BC, producta, in X; erit, ut parameter FO ad diametrum FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum. *cono ductas, definitur.* FIG. 8.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, est ad rectangulum FKG in ratione composita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK est ad FK, ut BX ad AX; itemque CK est ad GK, ut CX ad AX. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione composita ex BX ad AX, & ex CX ad AX.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum BXC ad AX quadratum. Et igitur erit ex æquali, ut rectangulum BXC ad AX quadratum, ita DK quadratum ad rectangulum FKG. Sed DK quadratum est ad rectangulum FKG, ut FO ad FG. Quare erit rursus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

V. Atque hinc modo facile erit, *secto ex cono triangulo per axem, eruere, ope ejus, ellipsim ex ipso cono, in qua parameter ad diametrum datam habeat rationem*. Sit enim BAC triangulum, per axem sectum, cujus ope ellipsis ex cono est eruenda. Ducatur in plano ejus recta AX, quæ conveniat cum BC, producta, ita quidem in X, ut rectangulum BXC ad AX quadratum sit in data illa ratione. Et quælibet ellipsis, quæ per triangulum BAC subinde eruitur ex cono, ut diameter ejus parallela fiat ipsi AX, quæsitæ conditionem adimplebit. *V. Deductio ellipsis ex cono, in qua parametri ad diametrum data sit ratio.* FIG. 8.

Neque vero difficile erit, adhibito triangulo BAC, talem ex cono ellipsim eruere, quæ diametrum habeat, rectæ AX parallelam. Ducatur siquidem in plano ejus trianguli recta quævis FG, æquidistans ipsi AX, & conveniens cum BC in K. Agatur postea per punctum istud K in plano circuli BCD recta DE, eidem BC perpendicularis. Et planum, transiens per rectas FG, DE, ellipsim, quam quærimus, in cono producet.

Hinc etiam, si ellipsim, ex cono eruendam, talem esse oporteat, ut *data sit in ea, tam ratio parametri ad diametrum, quam ipsius diametri longitudo*; solvetur problema, si ducta, ut prius, recta AX ea lege, ut rectangulum BXC ad AX quadratum sit in data ratione; agatur deinde ita quidem FG, ut non modo sit parallela ipsi AX, sed etiam, ut portio ejus, trianguli lateribus comprehensa, datam diametri longitudinem adæquet.

VI. *Solutio problematis, quod pro deductione ejus ellipsis velut lemma requiritur.* Fig. 9.

VI. Sed, *ad lemmaticum illud problema solvendum*, nimirum ad ducendam in plano trianguli rectam illam AX; nec etiam magno mentis acumine opus est. Abscindatur enim ex trianguli latere uno AC portio CM, quæ ad ipsum AC datam illam rationem obtineat. Agatur postea per punctum M recta MN, ipsi BC parallela, quæ conveniat in N cum circumferentia circuli, triangulum ambientis. Et punctum istud N determinabit positionem ipsius AX.

Est namque, propter circulum, rectangulum BXC æquale rectangulo AXN. Sed rectangulum AXN est ad AX quadratum, ut NX ad AX, sive etiam, ut CM ad AC. Quare

ac ipsum quoque rectangulum BXC ad AX quadratum erit, ut CM ad AC; & propterea, quum CM sit ad AC in data ratione; erit pariter in eadem data ratione rectangulum BXC ad AX quadratum.

Quum data ratio est minoris ad majus, recta illa AX semper duci potest. Nam eo in casu punctum M cadit inter alia duo A, & C; adeoque recta MN, quæ ipsi BC æquidistanter ducitur, circuli circumferentiæ semper occurrit. Vicissim autem, quum data ratio est majoris ad minus, non semper duci poterit recta illa AX. Nam tunc punctum M cadit ad partem alteram ipsius A; adeoque fieri quandoque potest, ut recta MN circuli circumferentiam non secet.

Unde etiam, secto ex cono triangulo per axem, semper licebit, ope ejus, eruere ellipsim ex ipso cono, in qua parameter ad diametrum datam habeat rationem, quotiescumque data ratio est minoris ad majus. Sed, si vicissim ratio data fuerit majoris ad minus, fieri quandoque potest, ut sit omnino impossibile, adhibito eo triangulo, optatam ex cono ellipsim eruere.

VII. Nullo etiam negotio, *per rectas, in cono ductas, determinari potest magnitudo, quam diametri figura habet in ellipsi*. Manentibus namque omnibus, ut supra, ducantur ex utroque diametri vertice rectæ FR, GS, ipsi BC parallelæ, quæ cum lateribus trianguli conveniant in punctis R, & S. Et rectangulum, sub his rectis comprehensum, diametri figuram adæquabit.

VII. *Figura, ad ellipsis diametrum pertinentis, magnitudo per rectas, in cono ductas, definitur.*

FIG. 8.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, est ad rectangulum FKG in ratione composita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK est ad FK, ut GS ad FG; itemque CK est ad GK, ut FR ad FG. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione composita ex GS ad FG, & ex FR ad FG.

Et quoniam duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum sub ipsis FR, GS ad FG quadratum; erit ex æquali, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum. Unde, sicuti DK quadratum est ad rectangulum FKG, ut FO ad FG; sic erit rursus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum.

Jam, assumpta communi altitudine FG, ut est FO ad FG, ita est rectangulum ex FO in FG ad idem FG quadratum. Et igitur rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex FO in FG. Sed figura diametri constituitur per rectangulum ex FO in FG. Quare aliud illud rectangulum ex FR in GS æquale erit præfatæ diametri figuræ.

VIII. *Theoremata pro determinatione parametri, etiam ignorata diametri longitudine.*

VIII. Ex eo autem, quod rectangulum, sub ipsis FR, GS adæquet diametri figuram, quæ constituitur per rectangulum ex FO in FG, plura nobis derivantur theoremata, quorum ope, *etiam ignorata diametri longitudine, definiri potest parameter ejus in cono.*

Fig. 8. Nimirum primo FO erit ad FR, ut est BX ad AX. Nam, quum rectangulum ex FR in GS sit æquale rectangulo ex FO in FG;

erit

erit, ut FO ad FR, ita GS ad FG. Sed GS est ad FG, ut BX ad AX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad FR, ita BX ad AX.

Secundo FO erit ad GS, ut est CX ad AX. Nam, ob eandem eorum rectangulorum æqualitatem, erit, ut FO ad GS, ita FR ad FG. Sed FR est ad FG in eadem ratione, quam habet CX ad AX. Quare erit ex æquali, ut FO ad GS, ita CX ad AX.

Tertio FO erit ad AF, ut est rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Nam FO ad AF rationem habet compositam ex FO ad FR, & ex FR ad AF; sive etiam ex BX ad AX, & ex BC ad AB. Sed duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad AF, ita rectangulum CBX ad rectangulum BAX.

Denique FO erit ad AG, ut est rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Nam FO ad AG rationem habet compositam ex FO ad GS, & ex GS ad AG; sive etiam ex CX ad AX, & ex BC ad AC. Sed duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Quare erit ex æquali, ut FO ad AG, ita rectangulum BCX ad rectangulum CAX.

IX. *Determinatio parametri simplicissima, a diametri longitudine nullimode dependens.*

IX. Unoquoque horum theorematum *determinabitur parameter in cono, etiam diametri longitudine non cognita*. Sed determinationem omnium *simplicissimam* suppetit nobis ipsa illa proprietas, unde ea fluunt theoremata. Fiat enim angulus FRV æqualis angulo BFG. Et portio FV, abscissa ex diametro per re- FIG. 8.

rectam RV, erit quæsita parametri longitudo.

Nam, ob æqualitatem eorum angulorum, erit, ut FR ad FV, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex FV in FG. Jam vero rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quare eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex FV in FG; adeoque, quemadmodum unum ejus latus FG est ipsa diameter, ita latus alterum FV diametri parametrum adæquabit.

X. *Alia ejusdem parametri determinatio, nulla habita ratione longitudinis diametri.*

X. Idem problema *de determinanda parametro in cono, nulla habita ratione longitudinis diametri*, potest etiam resolvi in hunc modum.

Fig. 8. Ex vertice coni A ducatur, tum recta AK, perpendicularis ipsi BC, cum recta AH, perpendicularis diametro FG. Abscindatur deinde ex priore AK portio AI, æqualis alteri AH. Et recta MN, ducta per punctum I æquidistanter ipsi BC, longitudinem parametri exhibebit.

Demissa etenim super AX perpendiculari BL, erit AK ad BL in ratione composita ex AK ad AI, & ex AI, seu AH ad BL. Sed AK est ad AI, ut BC ad MN; itemque AH est ad BL, ut AF ad AB, sive, ut FR ad BC. Itaque erit AK ad BL in ratione composita ex FR ad BC, & ex BC ad MN: proindeque, quum duæ istæ rationes componant pariter rationem, quam habet FR ad MN; erit ex æquali, ut AK ad BL, ita FR ad MN.

Et quoniam AK est ad BL, ut AX ad BX, sive etiam, ut FG ad GS; erit rursus ex

æqua-

æquali, ut FR ad MN, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex MN in FG. Sed rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quare eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex MN in FG: & propterea, ſicuti unum ejus latus FG eſt ipſa diameter, ita latus alterum MN diametri parametrum exhibebit.

CAP. V.

Quid hyperbolæ relate ad diametrum accidat, oſtenditur.

I. ELlipſi eſt valde affinis hyperbola. Nam in iſta quoque, *ſi binæ ad diametrum ordinatæ ducantur, erunt earum quadrata inter ſe, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice ſumptis, continentur.* I. *Hyperbolæ relate ad diametrum proprietas prima.*

Fiat etenim in cono ABC ſectio hyperbolica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ trianguli, per axem ſecti, unum quidem latus infra coni verticem, alterum ſupra verticem ſecat, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Oſtendendum eſt, DK quadratum eſſe ad HL quadratum, ut eſt rectangulum FKG ad rectangulum FLG. FIG. 6.

In eodem cono fiant etiam circuli duo BCD, MNH per plana, baſi æquidiſtantia. Et quoniam eorum diametris BC, MN inſiſtunt ad rectos angulos rectæ DK, HL; erunt iſta-

rum quadrata æqualia rectangulis BKC & MLN. Quare erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN.

Jam ratio horum rectangulorum componitur ex BK ad ML, & ex CK ad NL, sive etiam ex FK ad FL, & ex GK ad GL. Sed duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Itaque erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG.

Perspicuum est autem, eandem demonstrationem obtinere quoque, si binæ illæ ordinatæ ducantur in hyperbola opposita; vel si una ex iis ducatur in hyperbola principali, & altera in ejus adversa. Unde, sicuti eadem est utriusque hyperbolæ diameter, & eadem positio suarum ordinatarum; sic relate ad diametrum eadem quoque erit utriusque natura.

II. *Proprietas secunda, exhibens diametri parametrum, & figuram.* Fig. 6.

II. In utraque etiam hyperbola, si ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ sit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK sit ad rectangulum ei correspondens FKG, velut est ipsa FO ad diametrum FG; erit quadratum cujusvis alterius ordinatæ HL ad rectangulum FLG, quod illi correspondet, similiter, ut FO ad FG.

Ostensum est enim, DK quadratum esse ad HL quadratum, ut est rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Quare erit permutando, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita HL quadratum ad rectangulum FLG. Poni-

nitur autem, DK quadratum esse ad rectangulum FKG, ut est FO ad FG. Et igitur ex æquali HL quadratum ad rectangulum FLG erit etiam, ut FO ad FG.

Recta ista FO etiam in hyperbola diametri *parameter* appellabitur; & rectangulum, sub ipsa, & diametro contentum, hic quoque diametri *figura* dicetur. Ejus autem habita ratione, perspicuum est, id quidem utrique hyperbolæ contingere, ut *quadratum cujusvis ordinatæ sit ad rectangulum, quod sub correspondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice sumptis, continetur, in eadem illa ratione, quam parameter ad diametrum habet.*

III. *Proprietas tertia, hyperbolæ denominationem ostendens.* FIG. 6.

III. Maneat jam FO, ordinatis diametri parallela, in qua utique positione semper ea intelligi debet. Jungatur alia ejus extremitas O cum vertice altero G per rectam GO, cui occurrat in R ordinata quævis DK. Et quadratum ordinatæ hujus DK æquale erit correspondenti rectangulo FKR.

Nam rectangulum FKR est ad rectangulum FKG, ut KR ad KG. Sed KR est ad KG, ut FO ad FG, sive etiam, ut DK quadratum ad rectangulum FKG. Itaque erit ex æquali, ut rectangulum FKR ad rectangulum FKG, ita DK quadratum ad idem rectangulum FKG: & propterea DK quadratum, & rectangulum FKR æqualia erunt inter se.

Perspicuum est autem, rectangulum FKR majus esse rectangulo OFK. Quare quadratum ordinatæ DK idem rectangulum OFK pariter excedet. Hinc sortita est hujusmodi conica sectio nomen *hyperbolæ*, quia in ea

quadra-

quadratum cujusvis ordinatæ excedit semper rectangulum, quod fit ex parametro in abscissam correspondentem.

Excessus porro est rectangulum aliud, quod insistens eidem abscissæ, est simile, similiterque positum ei, quod diametri figuram constituit. Nam, ducta OS ipsi FG parallela, erit relate ad quadratum ipsius DK rectangulum OSR istiusmodi excessus: quod quidem ipsi OS, seu FK insistit, & est simile, similiterque positum ei, quod fit ex FO in FG; quum sint circa eandem diagonalem ejus rectanguli, quod sub ipsis GK, KR continetur.

IV. *Ratio parametri ad diametrum per rectas, in cono ductas, determinatur.* Fig. 10.

IV. Cæterum etiam in hyperbola *ratio, quam habet parameter ad diametrum, potest per rectas, in cono ductas, facili negotio definiri.* Positis enim omnibus, ut supra, si ducatur ex vertice coni A recta AX, ipsi FG parallela, quæ conveniat cum BC in X; erit, ut parameter FO ad diametrum FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, est ad rectangulum FKG in ratione composita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK est ad FK, ut BX ad AX; itemque CK est ad GK, ut CX ad AX. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione composita ex BX ad AX, & ex CX ad AX.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum BXC ad AX quadratum. Et igitur erit ex æquali, ut rectangulum BXC ad AX quadratum, ita DK quadratum ad rectangulum FKG. Sed DK

qua-

quadratum est ad rectangulum FKG, ut FO ad FG. Quare erit rursus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum.

V. *Deductio hyperbolæ ex cono, in qua parametri ad diametrum data sit ratio.*

Fig. 10.

V. Atque hinc modo facile erit, *secto ex cono triangulo per axem, eruere, ope ejus, hyperbolam ex ipso cono, in qua parameter ad diametrum datam habeat rationem*. Sit enim BAC triangulum, per axem sectum, cujus ope hyperbola ex cono est eruenda. Ducatur in plano ejus recta AX, quæ conveniat cum BC ita quidem in X, ut rectangulum BXC ad AX quadratum sit in data illa ratione. Et quælibet hyperbola, quæ per triangulum BAC subinde eruitur ex cono, ut diameter ejus parallela fiat ipsi AX; quæsitæ conditionem adimplebit.

Neque vero difficile erit, adhibito triangulo BAC, talem ex cono hyperbolam eruere, quæ diametrum habeat, rectæ AX parallelam. Ducatur siquidem in plano ejus trianguli recta quævis FG, æquidistans ipsi AX, & conveniens cum BC in K. Agatur postea per punctum istud K in plano circuli BCD recta DE, eidem BC perpendicularis. Et planum, transiens per rectas FG, DE, hyperbolam, quam quærimus, in cono producet.

Hinc etiam, si hyperbolam, ex cono eruendam, talem esse oporteat, ut *data sit in ea, tum ratio parametri ad diametrum, quam ipsius diametri longitudo*; solvetur problema, si ducta, ut prius, recta AX ea lege, ut rectangulum BXC ad AX quadratum sit in data ratione; agatur deinde ita quidem FG, ut

non

non modo sit parallela ipsi AX, sed etiam, ut portio ejus, trianguli lateribus comprehensa, datam diametri longitudinem adæquet.

VI. *Solutio problematis, quod pro deductione ejus hyperbolæ velut lemma requiritur.* FIG. II.

VI. Sed, *ad lemmaticum illud problema solvendum*, nimirum ad ducendam in plano trianguli BAC rectam illam AX; neque etiam magna animi solertia opus est. Producatur enim trianguli latus unum AC adeo quidem in M, ut CM ad AC datam illam rationem obtineat. Agatur postea per punctum M recta MN, ipsi BC parallela, quæ conveniat in N cum circumferentia circuli, triangulum ambientis. Et punctum istud N definiet positionem ipsius AX.

Nam, propter circulum, rectangulum BXC est æquale rectangulo AXN. Sed rectangulum AXN est ad AX quadratum, ut NX ad AX, sive, ut CM ad AC. Quare ipsum quoque rectangulum BXC ad AX quadratum erit, ut CM ad AC: & propterea, quum CM sit ad AC in data ratione; erit pariter in eadem data ratione rectangulum BXC ad AX quadratum.

Sive autem data ratio sit minoris ad majus, sive majoris ad minus, recta illa AX non semper duci poterit. Hic enim punctum M numquam repetitur inter alia duo A, & C; sed semper ad partem alteram ipsius C: proindeque, quæcumque sit ratio ipsius CM ad AC; semper fieri potest, ut recta MN, quæ ducitur per punctum M ipsi BC æquidistanter, circuli circumferentiam non secet.

Unde etiam, si ex cono triangulum per axem secetur, & eruenda sit, ope ejus, hyperbola ex ipso cono, in qua parameter ad diametrum

da-

datam habeat rationem: problema poterit esse solutu impossibile, non modo, quum ratio data est majoris ad minus; verum etiam, quum eadem illa ratio est vicissim minoris ad majus.

VII. Etiam in hyperbola *magnitudo, quam habet diametri figura, per rectas, in cono ductas, nullo negotio potest definiri*. Manentibus namque omnibus, ut supra, ducantur ex utroque diametri vertice rectæ FR, GS, ipsi BC parallelæ, quæ conveniant in punctis R, & S cum lateribus trianguli. Et rectangulum, sub his rectis comprehensum, diametri figuram adæquabit.

VII. Figura, ad hyperbolæ diametrum pertinentis, magnitudo per rectas, in cono ductas, definitur. FIG. 10.

Nam rectangulum BKC, vel ei æquale quadratum ex DK, est ad rectangulum FKG in ratione composita ex BK ad FK, & ex CK ad GK. Sed BK est ad FK, ut GS ad FG; itemque CK est ad GK, ut FR ad FG. Itaque erit DK quadratum ad rectangulum FKG in ratione composita ex GS ad FG, & ex FR ad FG.

Et quoniam duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum sub ipsis FR, GS ad FG quadratum: erit ex æquali, ut DK quadratum ad rectangulum FKG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum. Unde, sicuti DK quadratum est ad rectangulum FKG, ut FO ad FG; sic erit rursus ex æquali, ut FO ad FG, ita rectangulum ex FR in GS ad FG quadratum.

Jam, assumpta communi altitudine FG, ut est FO ad FG, ita est rectangulum ex FO in FG ad idem FG quadratum. Et igitur rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex

FO

FO in FG. Sed figura diametri constituitur per rectangulum ex FO in FG. Quare aliud illud rectangulum ex FR in GS præfatam diametri figuram adæquabit.

VIII. *Theoremata pro determinatione parametri, etiam ignorata diametri longitudine.*

VIII. Ex eo autem, quod rectangulum sub ipsis FR, GS adæquet diametri figuram, quæ constituitur per rectangulum ex FO in FG, plura nobis derivantur theoremata, quorum ope, *etiam ignorata diametri longitudine, definiri poterit parameter ejus in cono.*

Fig. 10.

Nimirum primo FO erit ad FR, ut est BX ad AX. Nam, quum rectangulum ex FR in GS sit æquale rectangulo ex FO in FG; erit, ut FO ad FR, ita GS ad FG. Sed GS est ad FG, ut BX ad AX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad FR, ita BX ad AX.

Secundo FO erit ad GS, ut est CX ad AX. Nam, ob eandem eorum rectangulorum æqualitatem, erit, ut FO ad GS, ita FR ad FG. Sed FR est ad FG in eadem ratione, quam habet CX ad AX. Quare erit ex æquali, ut FO ad GS, ita CX ad AX.

Tertio FO erit ad AF, ut est rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Nam FO ad AF rationem habet compositam ex FO ad FR, & ex FR ad AF; sive etiam ex BX ad AX, & ex BC ad AB. Sed duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum CBX ad rectangulum BAX. Itaque erit ex æquali, ut FO ad AF, ita rectangulum CBX ad rectangulum BAX.

Denique FO erit ad AG, ut est rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Nam FO ad AG rationem habet compositam ex FO ad

GS

GS, & ex GS ad AG; sive etiam ex CX ad AX, & ex BC ad AC. Sed duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Quare erit ex æquali, ut FQ ad AG, ita rectangulum BCX ad rectangulum CAX.

IX. *Determinatio parametri simplicissima, a diametri longitudine nullimode dependens.* FIG. 10.

IX. Unoquoque horum theorematum *determinabitur parameter in cono, etiam diametri longitudine non cognita*. Sed determinationem omnium *simplicissimam* suppetit nobis ipsa illa proprietas, unde recensita fluunt theoremata. Fiat enim angulus FRV æqualis angulo AFG. Et portio FV, abscissa ex diametro FG per rectam RV, erit quæsita parametri longitudo.

Nam, ob æqualitatem eorum angulorum, erit, ut FR ad FV, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex FV in FG. Sed rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quocirca eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex FV in FG: adeoque, quemadmodum unum ejus latus FG est ipsa diameter, ita latus alterum FV diametri parametrum adæquabit.

X. *Alia ejusdem parametri determinatio, nulla habita ratione longitudinis diametri.* FIG. 10.

X. Idem problema *de determinanda parametro in cono, nulla habita ratione longitudinis diametri*, potest etiam resolvi in hunc modum.

Ex vertice coni A ducatur, tum recta AK perpendicularis ipsi BC, cum recta AH, perpendicularis diametro FG. Abscindatur deinde ex priore AK portio AI, æqualis alteri AH. Et recta MN, ducta per punctum I æqui-

qui-

quidistanter ipsi BC, longitudinem parametri exhibebit.

Demissa etenim super AX perpendiculari BL, erit AK ad BL in ratione composita ex AK ad AI, & ex AI, seu AH ad BL. Sed AK est ad AI, ut BC ad MN; itemque AH est ad BL, ut AF ad AB, sive, ut FR ad BC. Itaque erit AK ad BL in ratione composita ex FR ad BC, & ex BC ad MN: proindeque, quum duæ istæ rationes componant pariter rationem, quam habet FR ad MN; erit ex æquali, ut AK ad BL, ita FR ad MN.

Et quoniam AK est ad BL, ut AX ad BX, sive etiam, ut FG ad GS; erit rursus ex æquali, ut FR ad MN, ita FG ad GS. Unde rectangulum ex FR in GS æquale erit rectangulo ex MN in FG. Sed rectangulum ex FR in GS adæquat diametri figuram. Quare eidem figuræ erit etiam æquale rectangulum ex MN in FG; & propterea, sicuti unum ejus latus FG est ipsa diameter, ita latus alterum MN diametri parametrum adæquabit.

C A P. VI.

Quæ sit parabolæ relate ad diametrum natura, aperitur.

I. *Parabolæ relate ad diametrum proprietas prima.*

I. RELIQUUM jam est, ut parabolæ relate ad diametrum naturam aperiamus. Primo igitur in ea, *si binæ ad diametrum ordinatæ ducantur; erunt earum quadra-*

ta

ta inter se, quemadmodum sunt abscissæ, quæ iis ordinatis correspondent.

Fiat enim in cono ABC sectio parabolica DFE, & ad diametrum ejus FG, quæ uni laterum trianguli, per axem secti, debet esse parallela, ducantur duæ ordinatæ DK, HL. Ostendendum est, DK quadratum esse ad HL quadratum, quemadmodum est abscissa FK ad abscissam FL. FIG. 5.

In eodem cono fiant etiam circuli duo BCD, MNH per plana, basi æquidistantia. Et quoniam eorum diametris BC, MN insistunt ad rectos angulos rectæ DK, HL; erunt istarum quadrata æqualia rectangulis BKC, MLN. Itaque erit, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum BKC ad rectangulum MLN.

Jam, propter parallelas AC, FG, latera horum rectangulorum CK, NL æqualia sunt inter se. Quare ratio ipsorum æqualis erit ei, quam habet latus BK ad latus ML. Sed BK est ad ML, ut FK ad FL. Et igitur erit ex æquali, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita FK ad FL.

II. Hinc, si ex vertice F ducatur recta FO, ordinatis parallela, quæ sit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ DK sit æquale rectangulo correspondenti OFK; erit quadratum cujusvis alterius ordinatæ HL æquale pariter rectangulo OFL, quod ei correspondet.

II. Proprietas secunda, exhibens diametri parametrum, & parabolæ denominationem ostendens.

Ostensum est enim, DK quadratum esse ad HL quadratum, ut est FK ad FL. Sed in hac eadem ratione est etiam rectangulum OFK ad rectangulum OFL. Quare erit ex æquali, FIG. 5.

ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum OFK ad rectangulum OFL: & propterea, sicuti ponitur DK quadratum æquale rectangulo OFK, ita HL quadratum rectangulo OFL pariter æquale erit.

Recta ista FO, quum nobis usui erit, diametri *parameter* appellabitur, quæ quidem in ea semper positione relate ad diametrum intelligi debet, ut sit ejus ordinatis parallela. Ipsius autem habita ratione, perspicuum est, id quidem parabolæ contingere, ut *quadratum cujusvis ordinatæ sit æquale rectangulo, quod fit ex parametro in abscissam correspondentem.* Nec sane alia de causa, quam *ob æqualitatem istam*, sortita est hæc conica sectio *parabolæ* nomen.

III. *Theoremata duo, pro determinanda in ipso cono parametri longitudine.* FIG. 12.

III. Cæterum, *ad determinandam in ipso cono parametri longitudinem*, usui nobis esse possunt theoremata duo, quæ sequuntur.

Primum est, quod, si ex vertice diametri F ducatur recta FR, ipsi BC parallela, FO sit ad FR, ut est FR ad AR, sive etiam, ut est BC ad AC. Nam idem DK quadratum æquale est, tum rectangulo BKC, propter circulum, cum rectangulo OFK, propter parabolam. Quare duo ista rectangula BKC, OFK æqualia erunt inter se: & propterea erit, ut BK ad FK, ita FO ad CK, seu FR. Sed BK est ad FK, ut FR ad AR, sive, ut BC ad AC. Itaque erit ex æquali, ut FO ad FR, ita FR ad AR, vel ita BC ad AC.

Alterum theorema est, quod FO sit ad AF, ut est BC quadratum ad rectangulum BAC. Nam FO est ad AF in ratione composita

sita

sita ex FO ad FR, & ex FR ad AF; sive etiam ex BC ad AC, & ex BC ad AB. Sed duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet BC quadratum ad rectangulum BAC. Itaque erit ex æquali, ut FO ad AF, ita BC quadratum ad rectangulum BAC.

IV. Modus simplex, & elegans determinandi longitudinem parametri in cono.

IV. Utroque horum theorematum *determinabitur in ipso cono longitudo parametri*. Speciatim vero ex theoremate primo suboritur nobis determinatio ista, valde *simplex*, ac *elegans*. Nimirum ad punctum R fiat angulus FRV, æqualis angulo BFG, sive BAC. Et portio FV, abscissa ex diametro FG per rectam RV, erit quæsita parametri longitudo. FIG. 12.

Nam, ob angulos illos æquales, erit, ut FV ad FR, ita BC ad AC. Sed ex primo theoremate BC est ad AC, ut FO ad FR. Itaque erit ex æquali, ut FV ad FR, ita FO ad eandem FR: & propterea FV ipsi FO æqualis erit.

V. Alter modus determinandi in cono parametri longitudinem.

V. Idem problema, *de determinanda in cono longitudine parametri*, resolvi quoque potest in hunc modum.

Ex vertice coni A ducatur, tum recta AK, perpendicularis ipsi BC, cum recta AH, perpendicularis diametro FG. Abscindatur deinde ex priore AK portio AI, æqualis alteri AH. Et recta MN, ducta per punctum I æquidistanter ipsi BC, longitudinem parametri exhibebit. FIG. 12.

Demissa enim super AC perpendiculari BL, erit AK ad BL in ratione composita ex AK ad AI, & ex AI, seu AH ad BL. Sed AK est ad AI, ut BC ad MN; itemque AH

est ad BL, ut AF ad AB, sive etiam, ut FR ad BC. Itaque erit AK ad BL in ratione composita ex FR ad BC, & ex BC ad MN.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet FR ad MN. Itaque erit ex æquali, ut AK ad BL, ita FR ad MN. Sed AK est ad BL, ut AC ad BC, sive ex primo theoremate, ut FR ad FO. Quare erit rursus ex æquali, ut FR ad MN, ita FR ad FO: proindeque duæ MN, FO æquales erunt inter se.

VI. Deductio parabolæ ex cono, cujus diameter datam parametrum habeat.

VI. Quemadmodum autem, facta in cono sectione parabolica, determinari potest in ipso cono parameter, ad ejus diametrum pertinens; sic vicissim, *secto ex cono triangulo per axem, licebit, ope ejus, eruere parabolam ex ipso cono, cujus diameter datam parametrum habeat.*

FIG. 12. Sit enim BAC triangulum, per axem sectum, cujus ope parabola ex cono est eruenda. Abscindatur ex basi ejus BC portio CK talis longitudinis, ut data parameter sit ad eam, veluti est BC ad AC. Tum per punctum K agatur, tam in plano trianguli BAC recta FG, ipsi AC parallela, quam in plano circuli BCD recta DE, alteri BC normalis. Et planum, transiens per binas istas rectas FG, DE, quæsitam in cono parabolam producet.

Nam, quum planum istud occurrat plano circuli BCD in recta DE, ipsi BC normalis erit FG ortæ sectionis conicæ diameter. Sed ex constructione FG est parallela lateri AC. Quare ipsa sectio DFE parabola erit. Deinde, ducta ex vertice diametri F recta FR æquidistanter ipsi BC; erit diametri ejus parameter

ad

ad rectam istam FR, ut BC ad AC. Sed in eadem ratione est etiam ex constructione; parameter data ad portionem CK, quæ ipsi FR est æqualis. Itaque parameter diametri FG erit ipsa parameter data.

VII. Sed videamus modo, qua ratione *proprietates ellipsis, & hyperbolæ vertantur in eas, quæ parabolæ competunt, ubi earum curvarum diameter infinitæ longitudinis fieri supponitur.*

VII. *Qua ratione proprietates parabolæ ex iis, quæ ellipsi, & hyperbolæ competunt, sunt deducendæ.*

Fig. 5. 6. 7.

Nimirum primo, tam in ellipsi, quam in hyperbola est, ut DK quadratum ad HL quadratum, ita rectangulum FKG ad rectangulum FLG. Jam, abeunte in infinitum puncto G, altero diametri vertice, rectæ duæ KG, LG fiunt longitudinis infinitę;adeoque,quum differant a se mutuo per finitam longitudinem KL, sumi poterunt velut æquales inter se. Unde erit rectangulum FKG ad rectangulum FLG, ut est FK ad FL: & propterea in hac eadem ratione erit pariter in parabola DK quadratum ad HL quadratum.

Deinde in utraque etiam earum curvarum quadratum cujusvis ordinatæ DK est ad rectangulum ei correspondens FKG, ut parameter FO ad diametrum FG; sive, assumpta communi altitudine FK,ut rectangulum OFK ad rectangulum KFG. Sed, abeunte in infinitum puncto G, rectæ duæ KG, FG fiunt æquales; atque adeo æqualia pariter rectangula FKG, KFG. Quare in parabola etiam DK quadratum æquale fiet rectangulo OFK.

Id ipsum consequitur quoque ex tertia earum curvarum proprietate, juxta quam

DK quadratum est æquale rectangulo FKR. Nam, quotiescumque in infinitum abit punctum G, rectæ duæ FG, OG fiunt parallelæ. Unde trapetium OFKR vertitur in parallelogrammum; atque adeo latera ejus opposita FO, KR evadunt æqualia. Quo fit, ut rectangulum OFK sit æquale rectangulo FKR; & consequenter, ut DK quadratum, velut æquale rectangulo FKR, adæquet quoque rectangulum OFK.

VIII. *Ostenditur eadem ratione, qualis esse debeat in parabola, tū ratio parametri ad diametrum, cum figura magnitudo.* FIG. 8. 10. 12.

VIII. Ulterius in parabola, quum parameter sit finita, diameter autem infinitæ longitudinis, *ratio parametri ad diametrum debet esse infinite parva*. Profecto autem finita illa ratio, quam vidimus superius obtinere in ellipsi, & hyperbola, talis evadit, quotiescumque in iis curvis alter diametri vertex G in infinitum abire supponitur.

Nam, quum in hac hypothesi duæ FG, AC parallelæ fiant inter se; recta AX, quæ ducitur per punctum A ipsi FG æquidistanter, cadet super AC. Quare, evanescente portione CX, evanescet pariter rectangulum BXC; & consequenter ratio ejus rectanguli ad AX quadratum, cui in ellipsi, & hyperbola ostensa est æqualis ratio parametri ad diametrum, infinite parva prodibit.

Præterea, si *figura diametri considerari velit etiam in parabola, eam, ob infinitam diametri longitudinem, infinitæ magnitudinis esse, oportebit*. Plane vero infinita prodibit, si ex magnitudine, quam habet in ellipsi, & hyperbola, volupe sit, illam eruere.

Enimvero in utraque earum curvarum exhi-

exhibet figuræ magnitudinem rectangulum ex FR in GS. Sed, abeunte in infinitum puncto G, altero diametri vertice, recta GS evadit infinita. Quare, quum infinitum quoque fiat rectangulum ex FR in GS; ipsa figuræ magnitudo infinita pariter evadet.

IX. Methodo non dissimili possunt etiam demonstrari duo illa theoremata, quibus *definitur in cono parameter, ad parabolæ diametrum pertinens.* IX. *Theoremata duo, pro determinanda in cono parametri longitudine, eadem methodo comprobantur.*

Ex eo enim, quod tum in ellipsi, cum in hyperbola rectangulum ex FR in GS sit æquale rectangulo ex FO in FG, quod constituit diametri figuram; erit in iisdem curvis, ut FO ad FR, ita GS ad FG. Quamquam vero utraque rectarum GS, FG infinita evadat, quotiescumque punctum G in infinitum abire supponitur; ratio tamen ipsarum vertitur in eam, quam habet FR ad AR, sive BC ad AC, eo quod fiat FG ipsi AC parallela. Unde erit in parabola, ut FO ad FR, ita FR ad AR, vel ita BC ad AB, prorsus ut supra. Fig. 8. 10. 12.

Sed hoc idem luculentius consequitur ex eo, quod tam in ellipsi, quam in hyperbola FO sit ad FR, ut est BX ad AX. Jam enim vidimus paulo ante, quod, abeunte in infinitum puncto G, non modo FG parallela fiat ipsi AC, sed & AX coincidat cum eadem AC. Inde igitur liquet, duas BX, AX ipsis BC, AC seorsim æquales evadere: & propterea, sicuti in ellipsi, & hyperbola FO est ad FR, ut BX ad AX; sic in parabola FO erit ad FR, ut est BC ad AC.

Quemadmodum autem, quum punctum

G in infinitum abire supponitur, duæ BX, AX fiunt ipsis BC, AC seorsim æquales; sic in eadem hypothesi rectangulum CBX idem fiet cum BC quadrato, & rectangulum BAX vertetur in illud, quod fit ex AB in AC. Unde, sicuti in ellipsi, & hyperbola FO est ad AF, ut rectangulum CBX ad rectangulum BAX; sic in parabola FO erit ad AF, ut est BC quadratum ad rectangulum BAG, prorsus etiam ut supra.

X. *Applicatio ejusdem methodi ad alia duo theoremata, quæ in ellipsi, & hyperbola eundem usum respiciunt.* Fig. 8. 10. 12.

X. Tam in ellipsi, quam in hyperbola, *pro determinanda parametri longitudine independenter ab ipsa diametro*, duo alia theoremata sese nobis obtulere. Primum est, quod FO sit ad GS, veluti est CX ad AX. Alterum, quod FO sit ad AG, veluti est rectangulum BCX ad rectangulum CAX. Jam, abeunte in infinitum puncto G, fit infinitæ longitudinis, tam recta GS, quam recta AG. Unde in parabola parameter diametri ad utramque earum rectarum rationem infinite parvam debet habere.

Plane vero, tum ratio, quam habet CX ad AX, cum ratio rectanguli BCX ad rectangulum CAX, talis evadit, ubi punctum G in infinitum abire supponitur. Nam in eo casu AX coïncidit cum AC; adeoque, punctis C, & X in unum coeuntibus, fit indefinitæ parvitatis, quin omnino evanescit, non modo recta CX, verum etiam rectangulum BCX: finitis interea manentibus, & recta AX, quæ evadit AC, & rectangulo CAX, quod vertitur in AC quadratum.

LI.

LIBER II.

De Sectionum Conicarum in Plano Descriptione.

SUperiore libro vidimus, quo pacto curvæ illæ, quæ conicæ sectiones appellantur, suam ex cono originem trahant. Nunc, qua ratione eædem curvæ possint in plano describi, sequitur, ut ostendamus. Sane Veteres non aliter, quam cono rursus adhibito, id obtinebant. Unde earum in plano descriptionem, velut arduum, & difficile quidpiam, reputabant. Sed Recentiores, nullius solidi ope, per solas linearum longitudines, eas describere docent. Quo fit, ut descriptio illarum in plano nullis hodie difficultatibus obnoxia deprehendatur.

CAP. I.

Qua ratione ellipsis in plano per conum describi possit, ostenditur.

I. ETsi Veteres, ad describendas in plano conicas sectiones, rursus conum adhibuerint; rem tamen non ea *universalitate* tradiderunt, quæ ei inesse videtur. I. *Quæ data requirantur pro descriptione sectionum conicarum.*

Ne

Ne igitur in eandem *labem* nos etiam incidamus, conabimur, curvas illas ita quidem, mediante cono, in plano describere, ut ratio eas hoc pacto describendi non excidat *universalitate* illa, quam natura sua secum includit.

Quæcumque autem sit conica sectio, quam oportet in plano describere, utique ad eam *determinandam* quatuor requiruntur. Horum prius est positio diametri. Alterum est ipsius longitudo, quæ sicuti finita in ellipsi, & hyperbola, sic in parabola infinita semper esse debet. Tertium est parameter ejusdem diametri. Et quartum denique est positio suarum ordinatarum.

Hinc, in tradenda descriptione sectionum conicarum, quatuor ista *nota* semper assumemus. Speciatim vero, quod attinet ad positionem ordinatarum, exhibebimus eam per eandem illam, quam parametro concedimus; ut quæ diametri ordinatis parallela semper concipi debet. Unde hac ratione *determinabimus* sectionem conicam describendam, dando magnitudine, & positione, tam diametrum, quam parametrum ejus.

II. *Proponitur methodus describendi ellipsim in plano per conum.* Fig. 8.

II. Ut igitur *a descriptione ellipsis* ordiamur, dentur in plano aliquo, tum magnitudine, cum positione rectæ duæ FG, FO, sibi mutuo occurentes in F. Et oporteat, in eodem plano describere ellipsim, cujus FG sit diameter, FO parameter diametri, & eadem FO recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent esse parallelæ.

Ducatur primo planum aliud CDE, occurrens plano rectarum FG, FO in recta DE, ipsi

ipsi FO parallela. Deinde ex puncto K, in quo duæ FG, DE sese mutuo secant, erigatur in ducto plano recta KC, perpendicularis super DE. Tum huic KC per punctum F, diametri verticem unum, parallela agatur FP.

Capiatur porro in recta ista FP punctum quodvis R. Et ducta RY æquidistanter ipsi GF, abscindatur ex ea portio RZ, quæ sit tertia proportionalis post duas FO, FR. Denique jungantur rectæ FZ, GR, quæ producantur, usque donec conveniant, tam inter se in puncto A, quam cum recta KC in punctis B, & C.

His peractis, concipiatur jam conus, cujus vertex sit punctum A, basis autem circulus BCD, descriptus super BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE. Et per intersectionem coni hujus cum plano, in quo datæ sunt rectæ FG, FO, habebitur ellipsis describenda.

III. Sit enim DFE sectio, facta per tale planum in coni ejus superficie. Et quoniam BC est diameter basis BCD; erit triangulum BAC ex cono sectum per axem. Unde, quum basi ejus BC normalis sit recta DE, in qua planum secans occurrit plano basis; erit recta FG diameter sectionis DFE: & propterea, quia eadem FG secat utrumque latus trianguli infra verticem coni; ipsa sectio DFE proculdubio erit ellipsis.

III. *Quod ellipsis, allata methodo descripta, quæsita conditiones adimpleat.*

FIG. 8.

Præterea in eadem sectione DFE ordinatæ, pertinentes ad ejus diametrum FG, debent esse parallelæ rectæ DE. Sed ex constructione recta DE parallela est rectæ FO.

Qua-

Quare eædem ordinatæ parallelæ quoque erunt ipsi FO: proindeque, ficuti ellipsis DFE, descriptæ in plano rectarum FG, FO, diameter est recta FG, sic ordinatæ ejus diametri parallelæ erunt rectæ FO.

Denique ex vertice coni A ducatur recta AX, ipsi FG parallela, quæ conveniat cum BC, producta, in X. Et ex superius ostensis parameter, quæ ad descriptæ ellipsis diametrum refertur, erit ad FR, ut est BX ad AX. Sed BX est ad AX, ut FR ad RZ, sive etiam ex constructione, ut FO ad FR. Quare erit ex æquali, ut FO ad FR, ita parameter diametri FG ad eandem FR: & propterea erit FO ipsa diametri parameter.

IV. *Ejusdem methodi universalitas ex infinitate conorum, quos suppetit, ostenditur.* FIG. 8.

IV. Dubitari itaque non potest, quin ellipsis DFE, descripta in plano rectarum FG, FO methodo tradita, quæsitæ conditiones adimpleat. Primo enim diameter ejus est recta FG; deinde diametri parameter est recta FO; denique eidem FO parallelæ sunt etiam ordinatæ, quæ ad diametrum illam referuntur. Sed perspicuum est quoque, methodum a nobis adhibitam, pro descriptione ejus ellipsis, esse adeo *universalem*, ut non unum, sed *infinitos* conos ad eum usum exhibeat.

Nam primo planum CDE duci potest infinitis plane modis. Etsi enim plano rectarum FG, FO occurrere debeat in recta DE, ipsi FO parallela; id tamen positionem ejus minime determinat. Deinde punctum R utcumque sumi potest in recta FP. Quo fit, ut longitudo ipsius FR adhuc modis innumeris possit variari. Utroque igitur ex capite liquet, *infini-*

finitam esse diversitatem conorum, quorum ope quæsitam ellipsim describere licebit.

Quemadmodum autem ex positione plani CDE dependet magnitudo anguli GFR, sic ex longitudine ipsius FR trahit angulus FGR magnitudinem suam. Unde, quia per quantitates istorum angulorum determinatur triangulum FRG; perspicuum est, infinitam illam conorum diversitatem, qui adhiberi possunt, ad quæsitam ellipsim describendam, ex eo unice proficisci, quod possit triangulum FRG infinitis plane modis variari.

V. Cujus natura sint infiniti illi coni, quos methodus præbet, aperitur. *Fig. 8.*

V. Quamquam vero *infiniti* sint coni, quibus quæsitam ellipsim describere licet, ii tamen sunt omnes *scaleni*, quum angulus GFO non ponitur rectus. Ubi enim triangulum, ex cono sectum per axem, non constituit cum plano basis angulos rectos; proculdubio conum ipsum scalenum esse oportet. Profecto autem facile erit ostendere, triangulum BAC, sectum ex cono per axem, non posse cum plano basis BCD rectos angulos constituere, quum angulus GFO nequaquam est rectus.

Nam, quotiescumque FO non constituit cum FG angulos rectos; tam ipsa, quam ejus parallela DE multo minus rectos angulos efficiet cum plano trianguli BAC, in quo recta FG reperitur. Ex constructione autem DE perpendicularis est super BC, quæ duorum planorum BAC, BCD communis est sectio. Quare, quum eadem DE sit in plano BCD, nec etiam duo ista plana BAC, BCD recta erunt ad invicem.

Iidem vero coni poterunt esse, tum *recti*,

cum

cum *scaleni*, quotiescumque angulus GFO ponitur rectus. Nam, constituente FO, vel etiam ejus parallela DE, rectos angulos cum FG; erit DE normalis utrique rectarum FG, BG; proindeque, tam ipsa DE recta erit ad planum trianguli BAC, quam duo plana BAC, BCD recta erunt ad invicem. Unde, si triangulum BAC fuerit isosceles, erit axis coni rectus etiam ad planum basis BCD; & consequenter ipse pariter conus erit rectus, & non scalenus.

VI. *Quid requiritur, ut triangulum per axem sectum, isosceles oriatur.* FIG. 8.

VI. Hinc, *ad definiendum casum coni recti*, non abs re erit, inquirere hoc loco, quid factu sit opus, quo triangulum BAC isosceles oriatur. Nimirum necesse est, sumere FR talis longitudinis, ut GR quadratum, adsciscens diametri figuram, ejusdem diametri quadratum adæquet; hoc est, ducta per alterum diametri verticem G recta GS, ipsi FR parallela, ut GR quadratum una cum rectangulo ex FR in GS sit æquale quadrato, quod fit ex diametro FG.

Ponamus enim, triangulum BAC isosceles esse. Et quoniam, completo parallelogrammo FSGP, fit etiam isosceles triangulum PGR; secabitur basis hujus PR bifariam a perpendiculo, quod super ipsam demittitur ex puncto G: proindeque quadrata GR, FR una cum rectangulo PRF æqualia erunt quadrato ex FG. Sed quadratum ex FR una cum rectangulo PRF est æquale rectangulo PFR, sive etiam ei, quod sub ipsis FR, GS continetur. Itaque erit quadratum ex GR una cum rectangulo ex FR in GS æquale quadrato,

to, quod fit ex diametro FG.

Id quum ita sit, perspicuum est, triangulum BAC tunc demum isosceles esse posse, quum ratio parametri ad diametrum est minoris ad majus. Nam in isto casu figura diametri, quæ constituitur per rectangulum ex FO in FG, minor erit quadrato ipsius diametri FG; adeoque fieri quandoque poterit, ut GR quadratum, adsciscens diametri figuram, ejusdem diametri quadratum adæquet.

Nec sane, quum isosceles est triangulum BAC, ratio parametri ad diametrum aliter esse potest. Sit enim AK axis coni. Et, ob basim trianguli BC bisectam in K, erit rectangulum BXC minus quadrato ex KX; adeoque multo minus quadrato, quod fit ex AX. Sed ex superius ostensis FO est ad FG, ut rectangulum BXC ad AX quadratum. Itaque ratio ipsius FO ad FG erit minoris ad majus.

VII. Sit jam ratio parametri FO ad diametrum FG minoris ad majus. Et oporteat, quæsitam ellipsim ita quidem, mediante cono, in plano describere, ut triangulum BAC isosceles oriatur; rectusque adeo ipse conus, quotiescumque angulus GFO ponitur rectus.

VII. *Quid methodo addendum, ut triangulum, per axem sectum, revera isosceles fiat.* Fig. 8.

Describatur super FG, velut diametro, semicirculus FQG; in quo aptetur recta FQ, quæ sit media proportionalis inter FO, & FG. Jungatur deinde GQ; & arcus, descriptus centro G, intervalloque GQ, signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC fiat isosceles.

Quum enim FQ sit media proportionalis inter FO, & FG; erit quadratum ex FQ æqua-

quale rectangulo OFG, quod constituit diametri figuram. Sed quadratum ex GR, seu GQ una cum quadrato ex FQ est æquale FG quadrato. Quare idem GR quadratum, adsciscens diametri figuram, æquale erit quadrato ejusdem diametri: proindeque, ex mox ostensis, triangulum BAC isosceles erit.

Patet autem, triangulum BAC tunc demum isosceles esse posse, quum angulus GFR non est major angulo GFQ. Nam, existente majore, perpendicularis, quæ ex puncto G demittitur super FP, major itidem erit recta GQ. Quare arcus, qui describitur centro G, intervalloque GQ, rectæ FP nequaquam occurret. Ut igitur problema sit capax solutionis, necesse est, planum CDE ita quidem inclinare ad planum rectarum FG, FO, ut angulus GFR non major oriatur angulo GFQ.

Quemadmodum vero, quum angulus GFR major est angulo GFQ, arcus, qui describitur centro G, intervalloque GQ, rectæ FP nequaquam occurrit; sic idem arcus continget rectam FP in unico puncto, quum angulus GFR æqualis est angulo GFQ; eamque secabit in duobus punctis, quum vicissim est minor. Unde, sicuti problema est impossibile in primo casu, sic erit capax unius dumtaxat solutionis in secundo, & duarum in tertio.

VIII. *Alia methodus describendi ellipsim in plano per conum in medium affertur.*

VIII. Cæterum problema principale, *de describenda ellipsi in plano per conum*, potest etiam resolvi in hunc modum.

Nimirum, datis ut supra rectis FG, FO, fiat eadem constructio, usque donec deventum

FIG. 8. fuerit ad punctum R, utcumque sumendum

in

in recta FP. Abscindatur postea ex diametro FG, producta, si opus, portio FV, æqualis parametro FO. Tum juncta RV, fiat angulus GFS, æqualis angulo FRV.

Producantur deinde rectæ duæ GR, SF, usque donec sibi mutuo occurrant in A, cum quibus conveniat quoque recta KC in punctis B, & C. Jamque, si conus concipiatur, cujus vertex sit punctum A, basis autem circulus BOD, descriptus super BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE; habebitur ellipsis describenda per intersectionem coni hujus cum plano, in quo datæ sunt rectæ FG, FO.

Ducatur etenim ex puncto R recta RZ, diametro GF parallela, quæ conveniat cum AF in Z. Et siquidem ostendi possit, FO esse ad FR, ut est FR ad RZ; jam hæc alia solutio coincidet cum priore, nec adeo de veritate ejus poterit dubitari. Id vero ostendetur hac ratione.

Ex constructione angulus GFS æqualis est angulo FRV. Sed, propter parallelas GF, RZ, idem angulus GFS æqualis est etiam angulo RZF. Quare duo anguli FRV, RZF æquales erunt inter se: & propterea erit, ut FV ad FR, ita FR ad RZ. Est autem ex constructione FV æqualis FO. Et igitur etiam FO erit ad FR, ut est FR ad RZ.

IX. *Quomodo in hac alia methodo triangulum, per axem sectum, orbri potest isosceles.*

IX. Atque hinc rursus patet, triangulum BAC tunc demum isosceles esse posse, quum parameter FO minor est diametro FG. Ubi enim isosceles est triangulum BAC, erit etiam isosceles triangulum FAR: proindeque duo FIG. 8.

anguli GRF, RFS æquales erunt inter se. Sed ex constructione æquales sunt etiam anguli FRV, GFS. Quare, ficuti angulus RFS major est angulo GFS, ita quoque erit angulus GRF major angulo FRV: & propterea erit FG major, quam FV, seu FO.

Patet etiam, non posse triangulum BAC isosceles esse, nisi FR sit talis longitudinis, ut GR quadratum, adsciscens diametri figuram, ejusdem diametri quadratum adæquet. Nam, quum æquales sint, tam anguli GRF, RFS, quam anguli FRV, GFS; erit quoque angulus GRV æqualis angulo GFR. Unde, quum sit, ut FG ad GR, ita GR ad GV; erit GR quadratum æquale rectangulo FGV.

Et quoniam ex constructione FO est æqualis FV; erit etiam rectangulum OFG, quod constituit diametri figuram, æquale rectangulo GFV. Quare erit GR quadratum una cum diametri figura æquale duobus rectangulis FGV, GFV. Sunt autem duo ista rectangula æqualia quadrato ipsius diametri FG. Itaque erit GR quadratum una cum diametri figura æquale ei, quod ex ipsa diametro describitur, quadrato.

Ex eo autem, quod duo anguli GRV, GFR sint etiam æquales inter se, quum isosceles est triangulum BAC, alia nobis subnascitur ratio describendi quæsitam ellipsim ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC isosceles oriatur. Nimirum, si abscissa ex diametro FG portione FV, ipsi FO æquali, describatur super GV portio circuli, quæ suscipiat angulum, æqualem angulo GFR; quando-

doquidem portio ista signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC isosceles fiat.

X. Sed nolim hic silentio præterire, quod in utraque solutione problematis principalis, si punctum R ita quidem sumptum fuerit in recta FP, ut portio FR fiat media proportionalis inter diametrum FG, & ejus parametrum FO; tunc punctum A abeat in infinitum, propter rectas FZ, GR, quæ in isto casu fiunt inter se mutuo parallelæ.

X. *Conus, quo describitur ellipsis, quandoque in cylindrum verti potest.* Fig. 8.

Nam in prima solutione FR est media proportionalis inter FO, & RZ. Unde, semper ac eadem FR est quoque media proportionalis inter FO, & FG; duæ RZ, FG æquales erunt inter se. Sed eædem RZ, FG sunt etiam ex constructione parallelæ. Quare erunt pariter æquales, & parallelæ rectæ FZ, GR, quæ illas conjungunt ad easdem partes: & propterea punctum A, in quo eæ conveniunt, in infinitum abibit.

In secunda vero solutione FO est æqualis FV. Unde, semper ac FR est media proportionalis inter FO, & FG; erit quoque, ut FV ad FR, ita FR ad FG, atque adeo angulus FRV æqualis erit angulo FGR. Ex constructione autem idem angulus FRV æqualis est etiam angulo GFS. Quare duo anguli FGR, GFS æquales erunt inter se: & consequenter, quum rectæ GR, FS fiant æquidistantes, punctum A, in quo eæ conveniunt, in infinitum abibit.

Huc adde, quod si per alterum diametri verticem G ducatur recta GS, ipsi FR parallela,

la, rectangulum ex FR in GS æquale erit diametri figuræ, quæ constituitur per rectangulum OFG. Unde, semper ac FR est media proportionalis inter FO, & FG; erit quadratum ejus æquale rectangulo OFG, atque adeo æquale ei, quod fit ex FR in GS. Hinc erit FR non solum parallela, sed æqualis pariter ipsi GS: & propterea duæ GR, FS, quæ illas conjungunt ad easdem partes, erunt etiam æquales, & parallelæ.

Jam, quum punctum A abit in infinitum, *ipse conus vertitur in cylindrum*. Unde describetur quæsita ellipsis in plano, non quidem mediante *cono*, sed adhibito *cylindro*. Et quidem ipsi Veteres norunt, ellipsim non solum ex cono, sed etiam ex cylindro erui posse. Nescio autem, num genuinam hujus rei rationem, quæ nobis inopinato sese obtulit, exploratam habuerint. Nimirum id evenit, quia *cylindrus haberi debet tamquam conus, cujus vertex in infinita a basi distantia reperitur*.

XI. *Quomodo de sectionibus cylindricis ex iis, quæ in cono fiunt, dijudicandum.* FIG. 13.

XI. Quod quum ita sit, *poterit de sectionibus cylindricis ex iis, quæ in cono fiunt, judicium ferri*. Sit ergo cylindrus BCNM duobus circulis parallelis, & æqualibus BCD, MNY utraque ex parte terminatus. Sitque etiam AK axis ipsius cylindri, hoc est recta, quæ eorum circulorum centra conjungit.

Secetur primo cylindrus iste plano, vel transeunte per axem AK, vel ei parallelo. Et quoniam hujusmodi sectio correspondet ei, quæ in cono fit plano per verticem; orientur in superficie cylindri binæ rectæ, tum inter

se,

ſe, cum eidem axi parallelæ; eritque adeo parallegrammum communis ſectio ipſius cylindri cum plano prædicto.

Secetur ſecundo idem cylindrus plano; quod etſi non tranſeat per axem ejus, cum illo tamen conveniat. Et quoniam ſectio iſta æquivalet ei, quæ in cono fit plano, non tranſeunte per verticem; orietur in ſuperficie cylindri linea undique curva: quæ etiam redibit in orbem, & ſpatium claudet; quum nequeat planum ſecans convenire cum axe cylindri, niſi idem planum utrinque etiam ex cylindro ipſo egrediatur.

Perinde autem, ac in cono, curva iſta erit circumferentia circuli, quotieſcumque planum ſecans baſi ipſius cylindri eſt parallelum. Et, ſi idem cylindrus ſit ſcalenus, ac ſecto ex eo parallelogrammo per axem BCNM, fuerit ei rectum, tam planum baſis BCD, quam planum ſectionis FGH, itemque angulus BCN æqualis angulo GFM, & angulus CBM æqualis angulo FGN; adhuc ſectio circulus erit, ut quæ ſectioni ſubcontrariæ coni ſcaleni correſpondet.

Per contrarium ſectio cylindri erit ſemper ellipſis, quum nec eſt baſi parallela, nec eidem ſubcontraria. Et ſiquidem planum ſecans DFE occurrat plano baſis, aut circuli æquidiſtantis BCD in recta DE, quæ ſit perpendicularis ad baſim parallelogrammi BCNM, ſecti ex cylindro per axem; erit diameter ipſius ellipſis recta FG, quæ duorum planorum BCNM, DFE communis eſt ſectio; & erunt ejus diametri ordinatæ rectæ omnes, FIG. 14.

quæ ipsi DE sunt parallelæ.

Sit jam FO parameter diametri FG. Et adhuc per rectas, in cylindro ductas, definiri poterit ratio parametri ad diametrum. Nam, sumpto in axe cylindri AK puncto quovis A, si ducatur ex eo recta AX, ipsi FG parallela, quæ conveniat cum BC, producta, in puncto X, & cum lateribus parallelogrammi BM, CN in punctis P, & Q; erit, ut parameter FO ad diametrum FG, ita rectangulum BXC ad rectangulum PXQ.

Sed, ductis ex utroque diametri vertice rectis FR, GS, ipsi BC parallelis; etiam in cylindro continebunt eæ rectangulum, quod diametri figuram adæquat. Interim, quum, ratione parallelogrammi FRGS, rectæ illæ FR, GS sint æquales, tum inter se, cum ipsi BC; rectangulum, sub iisdem contentum, idem erit, ac BC quadratum: proindeque magnitudo, quam habet in ellipsi diametri figura, exhiberi poterit in cylindro per quadratum, quod fit ex BC.

Denique, si fiat angulus FRV æqualis angulo BFG; portio FV, abscissa ex diametro FG per rectam RV, etiam in cylindro parametri longitudinem exhibebit. Nec silentio reticendum, quod in cylindro parallelogrammum BCNM nequeat esse rectangulum, nisi FR, aut ei æqualis BC, sit talis magnitudinis, ut GR quadratum, adsciscens diametri figuram, ejusdem diametri quadratum adæquet.

CAP.

CAP. II.

Ratio describendi hyperbolam in plano per conum, explicatur.

I. Ostenso, qua ratione describi possit ellipsis in plano per conum; videamus modo, *quo pacto per eundem conum hyperbola in plano sit describenda*. Dentur itaque in plano aliquo, tum magnitudine, cum positione rectæ duæ FG, FO, sibi mutuo occurrentes in F. Et oporteat, in eodem plano describere hyperbolam, cujus FG sit diameter, FO parameter diametri, & eadem FO recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent esse parallelæ.

I. *Proponitur methodus describendi hyperbolam in plano per conum.* FIG. 10.

Ducatur primo planum aliud CDE, occurrens plano rectarum FG, FO in recta DE, ipsi FO parallela. Deinde ex puncto K, in quo duæ FG, DE sese mutuo secant, erigatur in ducto plano recta KC, perpendicularis super DE. Tum huic KC per punctum F, diametri verticem unum, parallela agatur FP.

Capiatur porro in recta ista FP punctum quodvis R. Et ducta RY æquidistanter ipsi FG, abscindatur ex ea portio RZ, quæ sit tertia proportionalis post duas FO, FR. Denique jungantur rectæ FZ, GR, quæ sicuti sibi mutuo occurrunt in puncto A, sic producantur, usque donec conveniant cum re-

cta KC in punctis B, & C.

His peractis, concipiatur jam conus, cujus vertex sit punctum A, basis autem circulus BCD, descriptus super BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE. Et per intersectionem coni hujus cum plano, in quo datae sunt rectae FG, FO, habebitur hyperbola describenda.

II. *Quod hyperbola, allata methodo descripta, quaesita conditiones adimpleat.* Fig. 10.

II. Sit enim DFE sectio, facta per tale planum in coni ejus superficie. Et quoniam BC est diameter basis BCD; erit triangulum BAC ex cono sectum per axem. Unde, quum basi ejus BC normalis sit recta DE, in qua planum secans occurrit plano basis; erit recta FG diameter sectionis DFE: & propterea, quia eadem FG unum quidem trianguli latus infra verticem coni, & alterum supra verticem secat, ipsa sectio DFE erit hyperbola.

Praeterea in eadem sectione DFE ordinatae, pertinentes ad ejus diametrum FG, debent esse parallelae rectae DE. Sed ex constructione recta DE parallela est rectae FO. Quare eaedem ordinatae parallelae quoque erunt ipsi FO: proindeque, sicuti hyperbolae DFE, descriptae in plano rectarum FG, FO, diameter est recta FG, sic ordinatae ejus diametri parallelae erunt rectae FO.

Denique ex vertice coni A ducatur recta AX, ipsi FG parallela, quae conveniat cum BC in puncto X. Et ex superius ostensis parameter, quae ad descriptae hyperbolae diametrum refertur, erit ad FR, ut est BX ad AX. Sed BX est ad AX, ut FR ad RZ, sive etiam ex constructione, ut FO ad FR. Quare erit

ex

ex æquali, ut FO ad FR, ita parameter diametri FG ad eandem FR: & propterea erit FO ipsa diametri parameter.

III. *Ejusdem methodi universalitas ex infinitate conorum, quos suppetit, ostenditur.* Fig. 10.

III. Dubitari itaque non potest, quin hyperbola DFE, descripta in plano rectarum FG, FO methodo tradita, quæsitæ conditiones adimpleat. Primo enim diameter ejus est recta FG; deinde diametri parameter est recta FO; denique eidem FO parallelæ sunt etiam ordinatæ, quæ ad diametrum illam referuntur. Sed perspicuum est quoque, methodum a nobis adhibitam, pro descriptione ejus hyperbolæ, esse adeo *universalem*, ut non unum, sed *infinitos* conos ad eum usum exhibeat.

Nam primo planum CDE duci potest infinitis plane modis. Etsi enim plano rectarum FG, FO occurrere debeat in recta DE, ipsi FO parallela; id tamen positionem ejus minime determinat. Deinde punctum R utcumque sumi potest in recta FP. Quo fit, ut longitudo ipsius FR adhuc modis innumeris possit variari. Utroque igitur ex capite liquet, *infinitam* esse diversitatem conorum, quorum ope quæsitam hyperbolam describere licebit.

Quemadmodum autem ex positione plani CDE dependet magnitudo anguli GFR, sic ex longitudine ipsius FR trahit angulus FGR magnitudinem suam. Unde, quia per quantitates istorum angulorum determinatur triangulum FRG; perspicuum est, infinitam illam conorum diversitatem, qui adhiberi possunt, ad quæsitam hyperbolam describendam, ex eo unice proficisci, quod possit triangulum FRG infinitis plane modis variari.

IV. Quam-

IV. *Cujus natura sint infiniti illi coni, quos methodus praebet, aperitur.* FIG. 10.

IV. Quamquam vero *infiniti* sint coni, quibus quæsitam hyperbolam describere licet, ii tamen sunt omnes *scaleni*, quum angulus GFO non ponitur rectus. Ubi enim triangulum, ex cono sectum per axem, non constituit cum plano basis angulos rectos; proculdubio conum ipsum scalenum esse oportet. Profecto autem facile erit ostendere, triangulum BAC, sectum ex cono per axem, non posse cum plano basis BCD rectos angulos constituere, quum angulus GFO nequaquam est rectus.

Nam, quotiescumque FO non constituit cum FG angulos rectos; tam ipsa, quam ejus parallela DE multo minus rectos angulos efficiet cum plano trianguli BAC, in quo recta FG reperitur. Ex constructione autem DE perpendicularis est super BC, quæ duorum planorum BAC, BCD communis est sectio. Quare, quum eadem DE sit in plano BCD, nec etiam duo ista plana BAC, BCD recta erunt ad invicem.

Iidem vero coni poterunt esse, tum *recti*, cum *scaleni*, quotiescumque angulus GFO ponitur rectus. Nam, constituente FO, vel etiam ejus parallela DE, rectos angulos cum FG; erit DE normalis utrique rectarum FG, BC: proindeque, tam ipsa DE recta erit ad planum trianguli BAC, quam duo plana BAC, BCD recta erunt ad invicem. Unde, si triangulum BAC fuerit isosceles, erit axis coni rectus etiam ad planum basis BCD; & consequenter ipse pariter conus erit rectus, & non scalenus.

V. *Quid requi-*

V. Hinc, *ad definiendum casum coni re-*

cti,

ritur, ut triangulum, per axem sectum, isosceles oriatur. FIG. 10.

cti, non abs re erit, inquirere hoc loco, quid factu sit opus, quo triangulum BAC isosceles oriatur. Nimirum necesse est, sumere FR talis longitudinis, ut GR quadratum sit æquale quadrato diametri una cum ejus figura; hoc est, ducta per alterum diametri verticem G recta GS, ipsi FR parallela, ut GR quadratum sit æquale quadrato ex FG una cum rectangulo ex FR in GS.

Ponamus enim, triangulum BAC isosceles esse. Et quoniam, completo parallelogrammo FSGP, fit etiam isosceles triangulum PGR; secabitur basis hujus PR bifariam a perpendiculo, quod super ipsam demittitur ex puncto G: proindeque erunt quadrata GR, FR æqualia quadrato ex FG una cum rectangulo PRF. Sed rectangulum PRF est æquale quadrato ex FR una cum rectangulo PFR. Quare, dempto communi quadrato ex FR, erit GR quadratum æquale quadrato ex FG una cum rectangulo PFR, hoc est eo, quod fit ex FR in GS.

Id quum ita sit, perspicuum est, triangulum BAC isosceles esse posse, non modo, quum ratio parametri ad diametrum est minoris ad majus, verum etiam, quum eadem illa ratio est vicissim majoris ad minus. Nam in utroque casu nihil obstat, quominus possit quandoque GR quadratum æquale esse quadrato diametri una cum ejus figura.

VI. *Quid methodo addendum, ut triangulum, per axem se-*

VI. Oporteat jam, quæsitam hyperbolam ita quidem, mediante cono, in plano describere, ut triangulum BAC isosceles oriatur; rectusque adeo ipse conus, quotiescum-

que

ðum, reve-ro isosceles fiat. que angulus GFO ponitur rectus.

Ex puncto F erigatur super FG perpendicularis FQ, quæ sit media proportionalis inter FO, & FG. Jungatur deinde GQ; & arcus, descriptus centro G, intervalloque GQ, signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC fiat isosceles. FIG. 10.

Quum enim FQ sit media proportionalis inter FO, & FG; erit quadratum ex FQ æquale rectangulo OFG, quod constituit diametri figuram. Sed quadratum ex GR, seu GQ est æquale FG quadrato una cum quadrato ex FQ. Quare idem GR quadratum æquale erit quadrato diametri FG una cum ejus figura: proindeque, ex mox ostensis, triangulum BAC isosceles erit.

Patet autem, triangulum BAC semper isosceles esse posse, cujuscumque magnitudinis sit angulus GFR. Nam, quum sit GQ major, quam GF: arcus, qui describitur centro G, intervalloque GQ, rectæ FP semper occurret. Et quia eam secabit semper in duobus punctis, hinc inde positis à puncto F; liquet problema duas semper solutiones admittere.

VII. *Alia methodus describendi hyperbolam in plano per conum in medium affertur.*

VII. Hic etiam problema principale, *de describenda hyperbola in plano per conum*, potest resolvi in hunc modum.

Nimirum, datis ut supra rectis FG, FO, fiat eadem constructio, usque donec deventum fuerit ad punctum R, utcumque sumendum in recta FP. Producatur postea diameter GF usque ad punctum V, ita ut fiat FV æqualis parametro FO. Tum juncta RV, constituatur angulus GFS, æqualis angulo FRV. FIG. 10.

Conveniant porro rectæ duæ GR, FS in A, iisdemque occurrat quoque recta KC in punctis B,& C. Jamque, si conus concipiatur, cujus vertex sit punctum A, basis autem circulus BCD, descriptus super BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE; habebitur hyperbola describenda per intersectionem coni hujus cum plano, in quo datæ sunt rectæ FG, FO.

Ducatur etenim ex puncto R recta RZ, diametro FG parallela, quæ conveniat cum AF in Z. Et siquidem ostendi possit, FO esse ad FR, ut est FR ad RZ; jam hæc alia solutio coincidet cum priore, nec adeo de veritate ejus poterit dubitari. Id vero ostendetur hac ratione.

Ex constructione angulus GFS æqualis est angulo FRV. Sed, propter parallelas FG, RZ, idem angulus GFS æqualis est etiam angulo RZF. Quare duo anguli FRV, RZF æquales erunt inter se: & propterea erit, ut FV ad FR, ita FR ad RZ. Est autem ex constructione FV æqualis ipsi FO. Et igitur etiam FO erit ad FR, ut est FR ad RZ.

VIII. *Quomodo in hac alia methodo triangulum, per axem sectum, oriri potest isosceles.*

VIII. Atque hinc rursus patet, non posse triangulum BAC isosceles esse, nisi FR sit talis longitudinis, ut GR quadratum sit æquale quadrato diametri FG una cum ejus figura.

Fig. 10.

Ubi enim isosceles est triangulum BAC, erit etiam isosceles triangulum FAR; atque adeo duo anguli ARF, AFR æquales erunt inter se. Unde, quum æquales sint, tam anguli GRF, RFS, quam anguli FRV, GFS;

erit

erit quoque angulus GRV æqualis angulo GFR: & propterea, quum sit, ut FG ad GR, ita GR ad GV; erit GR quadratum æquale rectangulo FGV.

Jam rectangulum FGV est æquale quadrato ex FG una cum rectangulo GFV. Itaque, quum, propter æquales FV, FO, rectangulum GFV sit æquale rectangulo OFG, quod constituit diametri figuram; erit idem rectangulum FGV, vel ei æquale quadratum, quod fit ex GR, æquale quadrato diametri FG, una cum figura, ad eandem diametrum pertinente.

Ex eo autem, quod duo anguli GRV, GFR sint etiam æquales inter se, quum isosceles est triangulum BAC; alia nobis subnascitur ratio describendi quæsitam hyperbolam ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC isosceles oriatur. Nimirum, si producta diametro GF, usque donec fiat FV æqualis FO, describatur super GV portio circuli, quæ suscipiat angulum, æqualem angulo GFR; quandoquidem portio ista signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC isosceles fiat.

IX. *Conus, quo describitur hyperbola numquam in cylindrum verti potest.* Fig. 10.

IX. Liquet igitur, hyperbolam in plano per conum describi iisdem omnino modis, quibus præcedenti capite ellipsis descriptionem obtinuimus. Interim in utraque eam describendi ratione fieri numquam potest, ut punctum A, in quo duæ rectæ FS, GR sibi mutuo occurrunt, abeat in infinitum; *nec ideo ipse conus, quo mediante hyperbola describitur, unquam verti poterit in cylindrum.*

Nam,

Nam, quantum ad priorem attinet describendi rationem, etsi juxta eam, tam pro ellipsi, quam pro hyperbola ducenda sit per punctum R, utcumque sumptum in FP, recta RY diametro FG æquidistanter, ex qua deinceps abscindenda portio RZ talis longitudinis, ut sit tertia proportionalis post duas FO, FR; perspicuum est tamen, rectas FG, RZ existere ad partes contrarias ipsius FR, quum agitur de describenda ellipsi; & ad partem eandem ejusdem FR, quum quæstio est de descriptione hyperbolæ. Unde, junctis rectis FZ, GR fient eæ quadrilateri latera opposita in ellipsi, & se invicem decussabunt in hyperbola. FIG. 8. 10.

Quantum vero spectat ad alteram describendi rationem, juxta eam pro ellipsi quidem abscindenda est ex diametro FG portio FV, æqualis parametro FO; pro hyperbola vero producenda est ipsa diameter versus F, usque donec fiat FV æqualis FO. Et quamquam deinde pro utraque curva fieri debeat angulus GFS, æqualis angulo FRV; liquet tamen, rectam FS existere ad partem alteram diametri FG relate ad rectam FR in ellipsi, & jacere inter diametrum FG, & ipsam FR in hyperbola. Unde, ducta GS æquidistanter eidem FR, fient rursus GR, FS quadrilateri latera opposita in ellipsi, & se mutuo decussabunt in hyperbola. FIG. 8. 10.

X. *Quæ hyperbola dicitur æquilatera, quæq; etiam ellipsis idem nomen fortitur.*

X. Cæterum *in hyperbola describenda nihil obstat, quominus ratio parametri ad diametrum sit etiam æqualitatis*. Et quum id contingit, adhuc iisdem modis eam describe-

re

re licebit. Hujusmodi autem hyperbola, in qua diameter parametrum suam adæquat, communiter a Geometris vocatur *æquilatera*. Et quamquam ellipsis quoque describi possit diametro, & parametro, quæ habeant inter se rationem æqualitatis; hæc tamen non sortitur nomen *ellipsis æquilateræ*, nisi ipsi illud etiam accedat, ut ordinatæ rectos cum diametro angulos constituant.

Unde autem fiat, ut hyperbola vocetur æquilatera, per solam æqualitatem diametri cum parametro, sed non item ellipsis; alibi quidem a nobis ostendetur. Tantum hic observabimus, ellipsim æquilateram non aliam esse, quam ipsum circulum. Ob æqualitatem enim parametri cum diametro, erit in ea quadratum cujusque ordinatæ æquale pariter rectangulo, quod sub correspondentibus diametri portionibus, ab utroque vertice sumptis, continetur. Unde, quum eadem ordinata rectos cum diametro angulos constituat; natura ellipsis æquilateræ hæc erit, ut quadratum cujusque diametro perpendicularis adæquet rectangulum, sub ipsius diametri portionibus contentum.

Et sane haud difficile erit ostendere, ellipsim, quæ describitur methodo superius tradita, circulum fieri, quum æquales ponun-
Fig. 8. tur rectæ FG, FO, rectusque etiam angulus GFO, qui sub iis rectis continetur. Jam enim, ratione anguli recti, triangulum per axem sectum BAC rectos constituit angulos, tam cum plano basis BCD, quam cum plano sectionis DFE. Itaque, si ostendi possit, triangu-

gu-

gula duo ABC, AGF esse similia inter se; sectio, facta in cono, erit basi subcontraria; atque adeo circulus, per superius ostensa. Id vero demonstrabitur in hunc modum.

Ex constructione FO est ad FR, ut FR ad RZ. Itaque, semper ac ponitur FO æqualis FG, erit etiam, ut FG ad FR, ita FR ad RZ. Hinc triangula duo GFR, FRZ habebunt circum æquales angulos latera proportionalia: proindeque in iis angulus FGR angulo RFZ erit pariter æqualis. Sed, propter parallelas FR, BC, angulus RFZ æqualis est angulo CBZ. Quare, quum æquales sint anguli FGR, CBZ, duo triangula ABC, AGF æquiangula erunt, & consequenter similia inter se.

XI. Hinc autem *intima ratio elucescit, cur sectio subcontraria, non ellipsim, sed circulum nobis exhibeat*. Nimirum ellipsis abit in circulum, quum ei hæc duo contingunt. Primum, ut ordinatæ rectos cum diametro angulos constituant. Et deinde, ut parameter æqualis fiat diametro, ad quam refertur. Jam horum utrumque præstat sectio subcontraria. Ex eo enim, quod in ipsa, tam planum secans, quam planum basis rectum sit plano trianguli, per axem secti; fiunt ordinatæ, diametro perpendiculares. Ex eo autem, quod per eadem illa plana abscindantur duo triangula similia; inter diametrum, & parametrum ejus æqualitas inducitur.

XI. Sectionis subcontrariæ natura paulo clarius exponitur. FIG. 8.

Unde hac occasione notetur hoc loco velim, quod, sicuti ordinatæ rectos semper cum diametro angulos constituunt, quotiescum-

quo planum trianguli BAC rectum est, tam ad planum basis BCD, quam ad planum sectionis DFE; ita ratio parametri FO ad diametrum FG sit semper æqualitatis, quotiescumque duo triangula ABC, AGF sunt similia inter se. Neque enim ea triangula possunt esse inter se similia, nisi talia sint quoque triangula BKF, CKG. Unde, quum sit, ut BK ad FK, ita GK ad CK; erit rectangulum BKC æquale rectangulo FKG. Sed, propter circulum BCD, quadratum ex DK est æquale rectangulo BKC. Quare idem DK quadratum erit etiam æquale rectangulo FKG: & propterea, quum FO sit ad FG, ut est DK quadratum ad rectangulum FKG; duæ FO, FG erunt pariter æquales inter se.

Ostendi id etiam potest in hunc modum. Quoniam duo triangula ABC, AGF ponuntur similia; erit angulus ACB æqualis angulo AFG: & propterea, quum sint æquales duobus rectis, tam duo anguli ACB, ACX, quam duo anguli AFG, BFG; erit quoque angulus ACX æqualis angulo BFG. Sed, ob parallelas FG, AX, angulus BFG æqualis est angulo BAX. Itaque, quum æquales sint etiam duo anguli ACX, BAX; erit, ut CX ad AX, ita AX ad BX; proindeque erit AX quadratum æquale rectangulo BXC. Est autem, ex superius ostensis, ut FO ad FG, ita rectangulum BXC ad AX quadratum. Quare duæ FO, FG pariter inter se æquales erunt.

Hoc idem erui quoque potest ex eo, quod, si fiat angulus FRV, æqualis angulo BFG, portio FV, abscissa ex diametro FG

per rectam RV, parametri FO longitudinem adæquet. Nam, propter similitudinem triangulorum ABC, AGF, angulus ACB, sive ARF erit æqualis angulo AFG. Unde, quum sint æquales duobus rectis, tam duo anguli ARF, FRG, quam duo anguli AFG, BFG; erit quoque angulus FRG æqualis angulo BFG. Quo fit, ut recta RV cadat super RG; atque adeo, coeuntibus in unum punctis G, & V, erit portio FV æqualis diametro FG.

CAP. III.

Parabolam in plano per conum describendi ratio aperitur.

I. POst traditam rationem describendi in plano per conum, tam ellipsim, quam hyperbolam, aperienda nobis tandem est methodus, qua *describi possit in plano parabola, eodem adhibito cono.* I. *Proponitur methodus describendi parabolam in plano per conum.* FIG. 12.

Dentur itaque positione in plano aliquo rectæ duæ FG, FO, sibi mutuo occurrentes in F; quarum prior FG sit infinita versus G, altera FO sit etiam magnitudine data. Et oporteat, in eodem plano describere parabolam, cujus FG sit diameter, FO parameter diametri, & eadem FO recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent esse parallelæ.

Ducatur primo planum aliud CDE, occurrens plano rectarum FG, FO in recta DE, ipsi FO parallela. Deinde ex puncto K, in

quo duæ FG, DE ſeſe mutuo ſecant, erigatur in ducto plano recta KC, perpendicularis ſuper DE. Tum huic KC per punctum F, diametri verticem, parallela agatur FP.

Capiatur porro in recta iſta FP punctum quodvis R. Et ducta RY æquidiſtanter ipſi FG, abſcindatur ex ea portio RA, quæ ſit tertia proportionalis poſt duas FO, FR. Denique jungatur AF, & tam iſta, quam altera AR producantur, uſque donec conveniant cum recta KC in punctis B, & C.

His peractis, concipiatur jam conus, cujus vertex ſit punctum A, baſis autem circulus BCD, deſcriptus ſuper BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE. Et per interſectionem coni hujus cum plano, in quo datæ ſunt rectæ FG, FO, habebitur parabola deſcribenda.

II. *Quod parabola, allata methodo deſcripta, quæſita conditiones adimpleat.* Fig. 12.

II. Sit enim DFE ſectio, facta per tale planum in coni ejus ſuperficie. Et quoniam BC eſt diameter baſis BCD; erit triangulum BAC ex cono ſectum per axem. Unde, quum baſi ejus BC normalis ſit recta DE, in qua planum ſecans occurrit plano baſis; erit recta FG diameter ſectionis DFE: & propterea, quia eadem FG uni laterum trianguli AC eſt parallela, ipſa ſectio DFE erit parabola.

Præterea in eadem ſectione DFE ordinatæ, pertinentes ad ejus diametrum FG, debent eſſe parallelæ rectæ DE. Sed ex conſtructione recta DE parallela eſt rectæ FO. Quare eædem ordinatæ parallelæ quoque erunt ipſi FO: proindeque, ſicuti parabolæ DFE, deſcriptæ in plano rectarum FG, FO, diameter

eſt

est recta FG, sic ordinatæ ejus diametri parallelæ erunt rectæ FO.

Denique ex superius ostensis parameter, quæ ad descriptæ parabolæ diametrum refertur, erit ad FR, ut est BC ad AC, sive etiam, ut est FR ad AR. Sed ex constructione FR est ad AR, ut FO ad FR. Quare erit ex æquali, ut FO ad FR, ita parameter diametri FG ad eandem FR: & propterea erit FO ipsa diametri parameter.

III. Dubitari itaque non potest, quin parabola DFE, descripta in plano rectarum FG, FO methodo tradita, quæsitæ conditiones adimpleat. Primo enim diameter ejus est recta FG; deinde diametri parameter est recta FO; denique eidem FO parallelæ sunt etiam ordinatæ, quæ ad diametrum illam referuntur. Sed perspicuum est quoque, methodum a nobis adhibitam, pro descriptione ejus parabolæ, esse adeo *universalem*, ut non unum sed *infinitos* conos ad eum usum exhibeat.

III. Ejusdem methodi universalitas ex infinitate conorum, quos suppeditit, ostenditur.

FIG. 12.

Nam primo planum CDE duci potest infinitis plane modis. Etsi enim plano rectarum FG, FO occurrere debeat in recta DE, ipsi FO parallela; id tamen positionem ejus minime determinat. Deinde punctum R utcumque sumi potest in recta FP. Quo fit, ut longitudo ipsius FR adhuc modis innumeris possit variari. Utroque igitur ex capite liquet, *infinitam* esse diversitatem conorum, quorum ope quæsitam parabolam describere licebit.

Quemadmodum autem ex positione plani CDE dependet magnitudo anguli GFR, sic ex longitudine ipsius FR trahit parallelo-

grammum FKCR latitudinem suam. Unde, quia idem parallelogrammum determinatur, tam per suam latitudinem, quam per magnitudinem anguli GFR; liquet, infinitam illam conorum diversitatem, qui adhiberi possunt ad quæsitam parabolam describendam, non aliunde pendere, quam ex eo, quod possit parallelogrammum FKCR infinitis plane modis variari.

IV. *Cujus natura sint infiniti illi coni, quos methodus præbet, aperitur.* Fig. 12.

IV. Quamquam vero *infiniti* sint coni, quibus quæsitam parabolam describere licet, ii tamen sunt omnes *scaleni*, quum angulus GFO non ponitur rectus. Ubi enim triangulum, ex cono sectum per axem, non constituit cum plano basis angulos rectos; proculdubio conum ipsum scalenum esse oportet. Profecto autem facile erit ostendere, triangulum BAC, sectum ex cono per axem, non posse cum plano basis BCD rectos angulos constituere, quum angulus GFO nequaquam est rectus.

Nam, quotiescumque FO non constituit cum FG angulos rectos; tam ipsa, quam ejus parallela DE multo minus rectos angulos efficiet cum plano trianguli BAC, in quo recta FG reperitur. Ex constructione autem DE perpendicularis est super BC, quæ duorum planorum BAC, BCD communis est sectio. Quare, quum eadem DE sit in plano BCD, nec etiam duo ista plana BAC, BCD recta erunt ad invicem.

Iidem vero coni poterunt esse, tum *recti*, cum *scaleni*, quotiescumque angulus GFO ponitur rectus. Nam, constituente FO, vel etiam ejus parallela DE, rectos angulos cum

FG;

FG; erit DE normalis utrique rectarum FG, BC: proindeque, tam ipsa DE recta erit ad planum trianguli BAC, quam duo plana BAC, BCD recta erunt ad invicem. Unde, si triangulum BAC fuerit isosceles, erit axis coni rectus etiam ad planum basis BCD; & consequenter ipse pariter conus erit rectus, & non scalenus.

V. Hinc, *ad definiendum casum coni recti*, non abs re erit, inquirere hoc loco, quid factu sit opus, quo triangulum BAC isosceles oriatur. Nimirum necesse est, sumere FR talis longitudinis, ut siquidem in diametro FG capiatur punctum aliquod G, & jungatur GR, sit GR quadratum una cum rectangulo OFG æquale duobus quadratis FG, FR. *V. Quid requiritur, ut triangulum, per axem sectum, isosceles oriatur.* FIG. 12.

Ponamus enim, triangulum BAC isosceles esse. Et quoniam, ducta GP, ipsi AF parallela, fit etiam isosceles triangulum PGF; secabitur basis hujus PF bifariam a perpendiculo, quod super ipsam demittitur ex puncto G: proindeque GR quadratum una cum rectangulo PFR æquale erit duobus quadratis FG, FR.

Ulterius, quia parallelæ sunt inter se, tam rectæ GP, AF, quam rectæ FG, RA; erit, ut PF ad FG, ita FR ad RA. Sed ex constructione FR est ad RA, ut FO ad FR. Itaque erit ex æquali, ut PF ad FG, ita FO ad FR: & propterea, quum rectangulum PFR sit æquale rectangulo OFG; erit GR quadratum una cum rectangulo FGO æquale etiam quadratis FG, FR.

VI. Oporteat jam quæsitam parabo- *VI. Quid me-*

thodo addendum, ut triangulum, per axem sectum, revera isosceles fiat.

lam ita quidem, mediante cono, in plano describere, ut triangulum BAC isosceles oriatur; rectusque adeo ipse conus, quotiescumque angulus GFO ponitur rectus.

FIG. 12.

Abscindatur ex diametro FG portio FQ, quæ sit æqualis dimidio parametri FO. Deinde, sumpto in eadem diametro puncto quovis alio G, demittatur ex eo recta GT, perpendicularis super FP. Et circulus, transiens per puncta tria T, G, Q, signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC isosceles fiat.

Quum enim ex constructione FO dupla sit ipsius FQ; erit rectangulum OFG duplum quoque rectanguli GFQ. Sed, ob circulum, transeuntem per quatuor puncta T, R, G, Q, rectangulum GFQ est æquale rectangulo RFT. Quare idem rectangulum OFG erit duplum pariter rectanguli RFT.

Hinc, quum sit GR quadratum una cum duplo rectanguli RFT æquale duobus quadratis FG, FR; erit etiam GR quadratum una cum rectangulo OFG æquale iisdem quadratis FG, FR: proindeque, per ea, quæ mox ostensa sunt, parabola ita quidem, mediante cono, in plano describetur, ut triangulum BAC isosceles fiet.

VII.

Alia ejusdem methodi modificatio ad idem facilius obtinendum.

FIG. 12.

VII. Sed notetur hic velim, quod si jungantur puncta Q, & R per rectam QR, hæc cum diametro FG rectos angulos constituet. Quum enim, ratione circuli, transeuntis per quatuor puncta T, R, G, Q, æqualia sint rectangula GFQ, RFT; erit, ut FG ad FT, ita FR ad FQ: proindeque angulus FTG an-

gu-

gulo FQR æqualis erit. Sed ex constructione angulus FTG est rectus. Quare rectus erit pariter angulus FQR.

Id quum ita sit, problema de describenda in plano parabola ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC isosceles oriatur, facilius longe resolvi poterit in hunc modum. Nimirum abscindatur, ut antea, ex diametro FG portio FQ, quæ sit æqualis dimidio parametri FO. Erigatur deinde ex puncto Q recta QR, eidem diametro perpendicularis. Et recta ista QR signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC isosceles fiat.

Ex utraque autem constructione perspicuum est, triangulum BAC tunc tantum isosceles esse posse, quum recta FP non constituit rectos angulos cum diametro FG. Nam, ubi rectus est angulus PFG, coibit primo punctum T cum puncto F; atque adeo per tria puncta T, G, Q, velut in eadem recta existentia, nullus circulus transibit, nisi qui radium habet infinitum. Deinde vero perpendicularis, quæ super diametro erigitur ex puncto Q, fiet ipsi FP parallela; neque adeo ei occurrere poterit, nisi in infinita distantia a puncto F.

VIII. Quomodo hæc alia methodi modificatio eruatur ex ea, qua obtinet in ellipsi.

VIII. Non est tamen reticendum hoc loco, quod *posterior propositi problematis constructio erui quoque possit ex ea, quam pro eodem problemate superius attulimus in ellipsi.* Ibi enim, descripto super diametro FG semicirculo FQG, & aptata in eo recta FQ, quæ media esset proportionalis inter FO, & FG; com- FIG. 8.

comperiebamus punctum R ope arcus, cujus centrum esset punctum G, intervallum vero GQ. Sed facile erit ostendere, istiusmodi constructionem in eam, de qua agitur, verti, quotiescumque punctum G, alter diametri vertex, in infinitum abire supponitur.

Si enim ex diametro FG abscindatur portio FV, æqualis parametro FO, fiet FQ quadratum æquale rectangulo GFV. Unde quum duo quadrata FQ, GQ æqualia sint quadrato ex FG; erit quoque quadratum ex GQ æquale rectangulo FGV: proindeque erit, ut FG ad GQ, ita GQ ad GV. Hinc, translato intervallo GQ super ipsa diametro GF, cadet punctum Q inter alia duo F, & V. Quare, abeunte in infinitum puncto G, una cum ipsis FG, GV fiet etiam infinita GQ: & propterea arcus, qui describitur centro G, intervalloque GQ, cum tangente sua confundetur, & vertetur adeo in rectam, ipsi FG perpendicularem.

Hinc siquidem ostendi possit, quod in eadem hypotesi fiat FQ æqualis dimidio ipsius FV; jam liquido patebit, constructionem, quæ locum habet in parabola, esse eandem illam, quæ obtinet in ellipsi. Id vero demonstrabitur hoc pacto. Quoniam FG est ad GQ, ut GQ ad GV; erit convertendo, ut FG ad FQ, ita GQ ad QV. Sed, abeunte in infinitum puncto G, rectæ duæ FG, GQ sumi possunt velut æquales inter se; quum ambæ fiant longitudinis infinitæ, manente interim finita ipsarum differentia FQ. Quare in eadem hypothesi erunt etiam æquales rectæ duæ FQ,

QV:

QV: & propterea FQ semissis fiet ipsius FV.

IX. Præterea *eadem posterior propositi problematis constructio erui etiam potest ex ea, quam pro eodem problemate superius attulimus in hyperbola*. Ibi enim, erecta super diametro perpendiculari FQ, quæ media esset proportionalis inter FO, & FG; comperiebamus punctum R ope arcus, cujus centrum esset punctum G, intervallum vero recta GQ. Sed facile erit ostendere, istiusmodi quoque constructionem in eam, de qua agitur, verti, quum punctum G, alter diametri vertex, in infinitum abire supponitur.

IX. *Quomodo eadem modificatio eruatur etiã ex illa, quæ locum habet in hyperbola.*

Fig. 10.

Si enim producatur diameter GF, usque donec fiat FV æqualis parametro FO; erit FQ quadratum æquale rectangulo GFV. Unde, quum quadratum ex GQ sit æquale quadratis GF, FQ; erit idem GQ quadratum æquale etiam rectangulo FGV: proindeque erit, ut GV ad GQ, ita GQ ad GF. Hinc, translato intervallo GQ super ipsa diametro GF, cadet punctum Q inter alia duo F, & V. Quare, abeunte in infinitum puncto G, una cum ipsis GF, GV fiet etiam infinita GQ: & propterea arcus, qui describitur centro G, intervalloque GQ, cum tangente sua confundetur, & vertetur adeo in rectam, ipsi FG perpendicularem.

Hinc, siquidem ostendi possit, quod in eadem hypothesi fiat FQ æqualis dimidio ipsius FV; jam liquido patebit, constructionem, quæ locum habet in parabola, esse eandem illam, quæ obtinet in hyperbola. Id vero demonstrabitur hoc pacto. Quoniam GV

est

est ad GQ, ut GQ ad GF; erit dividendo, ut QV ad GQ, ita FQ ad GF. Sed, abeunte in infinitum puncto G, rectæ duæ GQ, GF sumi possunt velut æquales inter se; quum ambæ fiant longitudinis infinitæ, manente interim finita ipsarum differentia FQ. Quare in eadem hypothesi erunt etiam æquales rectæ duæ QV, FQ: & propterea FQ semissis fiet ipsius FV.

X. *Alia methodus describendi parabolam in plano per conum in medium affertur.* FIG. 12.

X. Cæterum hic quoque problema principale, *de describenda parabola in plano per conum*, resolvi potest hac alia ratione.

Nimirum datis, ut supra, rectis FG, FO, fiat eadem constructio, usque donec deventum fuerit ad punctum R, utcumque sumendum in recta FP. Abscindatur postea ex diametro FG portio FV, æqualis parametro FO. Tum, juncta RV, fiat angulus GFB, æqualis angulo FRV; & agatur per punctum R recta RC, ipsi FG parallela.

Producantur deinde rectæ duæ BF, CR usque donec sibi mutuo occurrant in A, cum quibus conveniat quoque recta KC in punctis B, & C. Jamque, si conus concipiatur, cujus vertex sit punctum A, basis autem circulus BCD, descriptus super BC, velut diametro, in plano rectarum BC, DE; habebibitur parabola describenda per interfectionem coni hujus cum plano, in quo datæ sunt rectæ FG, FO.

Plane enim, si ostendi possit, FO esse ad FR, ut est FR ad RA; alia ista solutio coincidet cum priore, nec adeo de veritate ejus poterit dubitari. Id vero ostendetur hoc pa-

pacto. Ex constructione angulus GFB æqualis est angulo FRV. Sed, propter parallelas FG, AC, idem angulus GFB æqualis est etiam angulo RAF. Quare duo anguli FRV, RAF æquales erunt inter se: & propterea erit, ut FV ad FR, ita FR ad RA. Est autem ex constructione FV æqualis FO. Et igitur etiam FO erit ad FR, ut est FR ad RA.

XI. *Quomodo in hac alia methodo triangulum, per axem sectum, oriri potest isosceles.* FIG. 12.

XI. Atque hinc rursus patet, non posse triangulum BAC isosceles esse, nisi FR sit talis longitudinis, ut sumpto in diametro FG puncto quovis G, junctaque GR, sit GR quadratum una cum rectangulo OFG æquale duobus quadratis FG, FR.

Ubi enim isosceles est triangulum BAC, erit etiam isosceles triangulum FAR. Quare, quum æquales sint, tam anguli CRF, RFB, quam anguli FRV, GFB; erit quoque angulus CRV æqualis angulo VFR. Sed, propter parallelas AC, FG, idem angulus CRV æqualis est etiam angulo RVF. Itaque duo anguli RVF, VFR æquales erunt inter se: & propterea, quum æqualia etiam sint latera FR, RV, triangulum FRV isosceles erit.

Hinc, quum basis hujus trianguli FV bifariam secetur a perpendiculo, quod super ipsam demittitur ex puncto R; erit GR quadratum una cum rectangulo GFV æquale duobus quadratis FG, FR. Ob æquales autem FV, FO, rectangulum GFV est æquale rectangulo OFG. Itaque idem GR quadratum una cum rectangulo OFG iisdem quadratis FG, FR pariter æquale erit.

Ex eo autem, quod duo anguli RVF,

VFR

VFR sint etiam æquales inter se, quum isosceles est triangulum BAC; alia nobis subnascitur ratio describendi quæsitam parabolam ita quidem, mediante cono, ut triangulum BAC isosceles oriatur. Nimirum, si abscissa ex diametro FG portione FV, ipsi FO æquali; fiat ad punctum V angulus FVR, æqualis angulo VFR; quandoquidem recta VR signabit in FP punctum illud R, quo opus est, ut triangulum BAC isosceles fiat.

XII. *Eadem constructio ex ea, quæ in ellipsi, & hyperbola continet, derivatur.* Fig. 8, 10.

XII. Nec silentio præteribimus, quod *ista etiam constructio prono alveo fluat ex ea, qua in ellipsi, & hyperbola hoc idem superius obtinuimus*. In iis etenim curvis sumpta quoque super diametro FG portione FV, quæ æqualis esset parametro FO, comperiebamus punctum R, describendo super GV circuli portionem, quæ susciperet angulum, æqualem angulo GFR. Sed facile erit ostendere, istiusmodi constructionem in eam, de qua agitur, verti, quotiescumque punctum G, alter diametri vertex, in infinitum abire supponitur.

Si enim rectam intelligamus, quæ eam circuli portionem tangat in V, & ad eandem cum illa plagam dirigatur; ea continebit cum FV angulum, æqualem angulo VFR. Unde, quia, abeunte in infinitum puncto G, fit ipsa GV infinitæ longitudinis, atque adeo infinita quoque diameter, quæ ad eam circuli portionem refertur; confundetur ipsa circuli portio cum tangente sua, & consequenter vertetur in rectam, constituentem cum FV angulum, æqualem angulo VFR; proindeque in eadem hypothesi invenietur punctum R, si fiat ad

pun-

punctum V angulus FVR, qui sit æqualis angulo VFR.

XIII. Iisdem itaque modis, quibus ellipsis, & hyperbolæ in plano per conum descriptionem obtinuimus, describitur quoque parabola. Sed punctum A, in quo rectæ duæ BF, CR sibi mutuo occurrunt, hic etiam, numquam in infinitum abire potest. Unde *ipse pariter conus, quo mediante parabola describitur, non secus ac in hyperbola, numquam verti poterit in cylindrum.* XIII. *Conus, quo describitur parabola, numquam in cylindrum verti potest.* Fig. 12.

Cylindri igitur ope tantum ellipsis describi potest. Et quamquam parabola, velut species quædam ellipsis, haberi queat; inde tamen non sequitur, parabolam quoque per cylindrum posse describi. Nam meminisse oportet, quod conus, quo describitur ellipsis, tunc quidem vertatur in cylindrum, quotiescumque punctum R subinde sumitur in recta FP, ut portio FR sit media proportionalis inter diametrum FG, & ejus parametrum FO. Fig. 8.

Quum enim in parabola diameter FG sit infinitæ longitudinis, utique media proportionalis inter ipsam, & ejus parametrum finita esse non potest. Quare, ubicumque sumetur in recta FP punctum R, semper intercepta portio FR, velut finita, minor erit linea illa, quæ media foret proportionalis inter FG, & FO: proindeque, quum quæstio erit de describenda parabola, perinde ac quum agitur de descriptione hyperbolæ, numquam fieri poterit, ut conus abeat in cylindrum. Fig. 12.

CAP.

CAP. IV.

Qua ratione ellipsis in plano per solas rectas describi possit, demonstratur.

I. *Proponitur ratio describendi ellipsim in plano per rectas solas.* Fig. 15.

I. Vidimus huc usque, quo pacto describendæ sint in plano conicæ sectiones, adhibendo rursus solidum illud, ex quo eæ trahunt originem suam. Nunc, qua ratione eædem curvæ describi possint in plano, per solas linearum longitudines, ostendendum nobis erit. Ut autem *a descriptione ellipsis* iterum ordiamur, dentur in plano aliquo, tum magnitudine, cum positione, rectæ duæ AB, AD, sibi mutuo occurrentes in A. Et oporteat, in eodem plano describere ellipsim, cujus AB sit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent esse parallelæ.

Ducatur per punctum D recta DE, ipsi AB parallela. Tum capiantur aliæ duæ rectæ AX, BZ, quæ revolvantur circa puncta A, & B in ipso plano rectarum AB, AD. Fiat autem earum revolutio hac lege, ut portio DF, abscissa ex DE per priorem AX, sit perpetuo æqualis portioni AG, quam ex parametro AD, producta si opus, abscindit eodem tempore recta altera BZ. Dico, curvam, quæ in eodem plano rectarum AB, AD describitur continuis intersectionibus ipsarum

AX,

AX, BZ, ellipsim, quam quærimus, esse.

Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipsi AD parallela, quæ conveniat cum AB in puncto N. Jamque erit punctum M in quæsita ellipsi, si utique ostendi possit, MN quadratum esse ad rectangulum ANB, ut est AD ad AB. Id vero ostendetur in hunc modum. Quadratum ex MN est ad rectangulum ANB in ratione composita ex MN ad AN, & ex MN ad NB; sive etiam in ratione composita ex AD ad DF, & ex AG ad AB. Sed, ob æquales DF, AG, duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AD ad AB. Itaque erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

II. Non ergo dubitari potest, quin mutuis intersectionibus rectarum AX, BZ describatur ellipsis, quam quærimus. Interim, ut *descriptio ejus melius intelligatur*, notandum est primo, quod ubi recta AX fertur circulariter ex AD versus AB; tunc recta altera BZ ferri debeat circulari etiam motu ex BA versus BI, quam ipsi AD suppono parallelam. Et quoniam revolutio harum rectarum ea lege fieri debet, ut portiones DF, AG, abscissæ per ipsas ex rectis DE, AD, sint perpetuo æquales inter se: perspicuum est, quod ubi recta AX pervenit ad AB, & infinitam adeo portionem abscindit ex DE; tunc recta altera BZ super BI reperiatur, quia hac ratione ipsa quoque ex AD infinitam portionem abscindet.

II. Monita pro allata ellipsis descriptione melius intelligenda.

FIG. 15.

Notandum est etiam, quod quotiescum-

que eadem AX pergit moveri circulariter ex AB versus AH, quam ipsi AD in directum esse suppono; tunc recta altera BZ prosequi debeat motum suum circularem ex BI versus BR, in quam AB, quum producitur, cadit. Et quoniam motus earundem rectarum ea adhuc lege perfici debet, ut portiones DF, AG, quas abscindunt ex ipsis DE, AD, ex altera parte productis, maneant semper æquales inter se: liquet, quod ubi recta AX pervenit ad AH, & nullam adeo portionem abscindit ex DE; tunc altera BZ super BR reperiatur, quia hac ratione ipsa etiam ex AD nullam portionem abscindet.

III. *Figura ellipsis ea alata ejus descriptione deducitur.* III. Atque hinc luce clarius apparet, *ellipsim constare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum positis*, quæ junguntur simul in utroque vertice ejusdem diametri.

FIG. 15. Una siquidem describitur, quum recta AX fertur circulariter ex AD versus AB, eaque continetur in angulo BAD. Altera describitur, quum eadem AX moveri pergit ex AB versus AH, & pars ista continetur in angulo BAH. Nec sane, continuando motum ejusdem rectæ AX, usque donec circumferentiam integram absolvat, aliæ ei partes addi possunt.

Nam primo, quotiescumque recta AX fertur ex AH versus AK, quam ipsi AB in directum esse suppono; tunc altera BZ prosequetur motum suum ex BR versus BL, in quam BI, quum producitur, cadit. Quare, quum fiant earundem rectarum intersectiones in angulo BAD; describetur eadem ellipsis portio, quæ in angulo illo continetur. Et se-

cun-

cundo, ubi eadem recta AX fertur ex AK versus AD, tunc altera BZ moveri perget ex BL versus BA. Unde, quum earundem rectarum intersectiones fiant in angulo BAH; describetur ellipsis portio illa, quæ eo in angulo continetur.

IV. Ex allata autem ellipsis descriptione perspicuum est, *ei id quidem contingere*, ut si per aliquod ejus punctum M ducantur ex diametri verticibus A, & B rectæ duæ AX, BZ; portiones DF, AG, quas ipsæ abscindunt ex rectis DE, AD, productis si opus, sint semper æquales inter se. Sed, si eædem AX, BZ protrahantur, usque donec conveniant cum rectis BL, IE, similiter si opus productis, in punctis O, & Q; erunt etiam æquales portiones BO, IQ.

IV. *Proprietas ellipsis, quæ ex adducta ejus descriptione consequitur.*

FIG. 15.

Quum enim æquales sint inter se, tam duæ AD, BI, quam duæ DF, AG; erit ut AD ad DF, ita BI ad AG. Sed, ob triangula æquiangula ADF, ABO, AD est ad DF, ut est BO ad AB; itemque, ob triangula æquiangula BIQ, BAG, BI est ad AG, ut est IQ ad AB. Itaque erit ex æquali, ut BO ad AB, ita IQ ad eandem AB: & propterea duæ BO, IQ æquales erunt inter se.

Hinc, per intersectionem rectarum AX, BZ, describetur quæsita ellipsis, non solum, quum rectæ illæ subinde revolvuntur circa puncta A, & B, ut portiones DF, AG, quas abscindunt ex rectis DE, AD, productis si opus, sint perpetuo æquales inter se; verum etiam, quum suas circa puncta illa revolutiones subinde perficiunt, ut sint æquales por-

tiones BO, IQ, quas abscindunt ex rectis BI, IE, similiter si opus productis.

V. *Praecedentis proprietatis speciale quoddam accidens adnotatur.* FIG. 15.

V. Etsi autem æquales sint inter se, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ: perspicuum est tamen, *minui quidem istas, quum eæ augentur; & per contrarium augeri, quum illæ minuuntur*. Sed, tam *incrementum*, quam *decrementum* fit semper *ea lege*, ut rectangulum ex una illarum DF in unam istarum BO exhibeat ubique magnitudinem figuræ ipsius diametri AB. Nam, ob triangula æquiangula ADF, ABO, ut est AD ad DF, ita est BO ad AB: proindeque rectangulum ex DF in BO æquale erit rectangulo ex AD in DB, quod ex superius dictis constituit diametri figuram.

Hinc, quotiescumque æquales fiunt inter se omnes quatuor portiones DF, AG, BO, IQ, necesse est, ut unaquæque ipsarum media evadat proportionalis inter diametrum AB, & ejus parametrum AD; atque adeo, ut cujusque quadratum æquale fiat rectangulo BAD. Id vero contingit, quum illud ellipseos punctum describitur, ad quod pertinet ordinata, quæ bifariam dividit diametrum AB; hoc est, quum duæ AN, NB æquales fiunt inter se.

Ubi enim duæ AN, NB inter se sunt æquales, erit ut AN ad MN, ita NB ad eandem MN. Sed, ob triangula æquiangula ANM, ABO, AN est ad MN, ut AB ad BO; pariterque, ob triangula æquiangula BNM, BAG, NB est ad MN, ut AB ad AG. Itaque erit ex æquali, ut AB ad BO, ita AB

ad

ad AG : & propterea duæ AG, BO æquales erunt inter se.

VI. Id quum ita sit, *juvat hic advertere*, quod etsi in describenda ellipsi revolutio rectarum AX, BZ temperari possit, tam æqualitate portionum DF, AG, quam æqualitate portionum BO, IQ; consultius sit tamen, adhibere æqualitatem illarum, quum describi debet portio ellipsis, quæ refertur ad semissem diametri superiorem; & vicissim æqualitatem istarum, quum per contrarium describenda est portio altera, quæ diametri semissem alium inferiorem respicit.

VI. *Quid peragendum, ut integra ellipsis descriptio haberi possit.*

FIG. 15.

Quantum enim ad portiones DF, AG; eæ, sicuti nullius magnitudinis sunt in vertice A, ita in recessu ab illo vertice majores semper, ac majores fiunt, tandemque infinitæ evadunt in vertice altero B. Quare integra ellipsis numquam describi posset, si revolutio rectarum AX, BZ æqualitate earum portionum semper esset temperanda.

Quantum vero ad portiones BO, IQ; istæ per contrarium nullius omnino magnitudinis sunt in vertice B, tum in recessu a vertice isto majores semper, ac majores fiunt, tandemque in vertice altero A infinitæ deprehenduntur. Unde integram ellipsim nunquam adhuc describere liceret, si ipsarum æqualitate revolutionem rectarum AX, BZ dirigere semper oporteret.

Quocirca, ut integræ ellipsis descriptio haberi possit, præstat, partem ejus superiorem describere æqualitate portionum DF, AG; & partem inferiorem æqualitate portio-

num BO, IQ. Et, ut idem fit terminus incrementi, tam illarum, quam istarum, sejungi poterit pars ellipsis superior ab inferiore per ordinatam, quæ bisecat diametrum AB.

VII. *Quomodo, data diametro cum positione suarum ordinatarum, determinari potest longitudo parametri.* Fig. 15.

VII. Ex eo porro, quod æquales sint inter se, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ, *plura possunt obtineri, aliquem fortasse usum deinceps habitura*.

Nimirum primo *determinari potest longitudo parametri*, quotiescumque una cum ellipsi data est, tam diameter AB, quam positio suarum ordinatarum.

Sit enim AD, vel BI recta illa, cui omnes diametri ordinatæ sunt parallelæ. Et sumpto in ellipsi puncto quovis M, agantur per illud ex verticibus diametri A, & B rectæ AX, BZ, quæ cum ipsis AD, BI conveniant in punctis G, & O.

Abscindatur deinde ex AB, utrinque producta si opus, vel portio AS, æqualis ipsi AG; vel portio BT, æqualis ipsi BO. Et parametri longitudinem exhibebit, tam recta SF, parallela rectæ AD, & terminata ad rectam AX; quam recta TQ, parallela eidem AD, & terminata ad rectam BZ.

VIII. *Quomodo definiri potest punctum, in quo recta, ex uno vertice ducta, secat ellipsim.* Fig. 15.

VIII. Secundo *definiri potest punctum*, in quo recta AX, ducta ex vertice A, secat ellipsim. Nimirum, si ex vertice altero B ducatur recta BZ, quæ abscindat, vel ex AD portionem AG, æqualem ipsi DF; vel ex IE portionem IQ, æqualem ipsi BO. Nam intersectio rectarum AX, BZ quæsitum punctum exhibebit.

Hinc, siquidem recta AX cadat super

AD,

AD, quæ ducta est per verticem A diametri ordinatis æquidistanter; continget ea ellipsim in solo puncto A. Nam in isto casu DF quidem evanescit, BO vero fit infinita. Quare, ut etiam evanescat AG, & infinita fiat IQ, ducenda erit recta altera BZ per ipsum verticem A.

Per contrarium vero, quotiescumque recta AX angulum constituit cum AD, tunc ea non solum in A, sed in alio quoque puncto secabit ellipsim. Nam, ratione ejus anguli, est finitæ magnitudinis, tam portio DF, quam portio BO: proindeque recta altera BZ per ipsum verticem A transire non poterit.

Inde autem consequitur, quod si in plano descriptæ ellipsis detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela diametri ordinatis, semper ex vertice A duci possit recta alia, quæ ei parallela, secet ellipsim in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum constituat cum AD.

IX. Denique *determinari potest punctum*, in quo recta BZ, ducta ex vertice B, secat ellipsim. Nimirum, si ex vertice altero A ducatur recta AX, quæ abscindat, vel ex DE portionem DF, æqualem ipsi AG; vel ex BI portionem BO, æqualem ipsi IQ. Nam intersectio rectarum BZ, AX quæsitum punctum exhibebit.

IX. *Quomodo determinari potest punctum, in quo recta, ex vertice alio ducta, secat ellipsim.* FIG. 15.

Hinc, siquidem recta BZ cadat super BI, quæ ducta est per verticem B diametri ordinatis æquidistanter; continget ea ellipsim in solo puncto B. Nam in isto casu AG quidem fit infinita, IQ vero evanescit. Quare, ut

etiam infinita fiat DF, & BO evanescat, ducenda erit recta altera AX per ipsum verticem B.

Per contrarium vero, quotiescumque recta BZ angulum constituit cum BI, tunc non solum in B, sed in alio quoque puncto ea secabit ellipsim. Nam, ratione ejus anguli, est finitæ magnitudinis, tam portio AG, quam portio IQ: proindeque recta altera AX per ipsum verticem B duci non poterit.

Huic autem consequens est, quod si in plano descriptæ ellipsis detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela diametri ordinatis, semper ex vertice B duci possit recta alia, quæ ei parallela, ellipsim secet in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum constituat cum BI.

X. *Ellipsis per solas rectarum longitudines descriptio altera paulo specialis.* Fig. 16.

X. Cæterum haud quidem putandum est, ellipsim in plano *per solas rectarum longitudines* dumtaxat *exposita ratione* posse describi. Vix enim ulla est ejus proprietas, ex qua *peculiaris* eam describendi modus nobis non subnascitur. Quin sæpe ex eadem proprietate possunt etiam *plures* derivari.

Ita, si angulus BAD, quem constituit diameter AB cum parametro AD, fuerit rectus; atque adeo diameter AB major parametro AD: ope ejusdem illius proprietatis quæ ellipsi competit relate ad diametrum, poterit etiam quæsita ellipsis describi in hunc alium modum.

Extendatur diameter BA usque ad H, ita ut AH sit ad BH, veluti est AD ad AB. Deinde, erecta super BH perpendiculari HL,

re-

revolvatur, tum circa verticem A angulus rectus XAY, cum circa verticem alterum B recta BZ.

Fiat porro utriusque revolutio ea lege, ut intersectio rectæ BZ cum latere anguli AY contingat semper super recta HL. Et intersectio ejusdem rectæ BZ cum latere altero AX optatam ellipsim in plano delineabit.

XI. Nec sane difficile erit, *hujus rei veritatem ostendere*. Ex aliquo enim intersectionis puncto M ducatur ad diametrum ordinata MN: quæ, quum sit ei perpendicularis, parallela erit ipsi HL: & consequenter duo triangula BNM, BHL æquiangula erunt.

XI. *Demonstratio alterius hujus rationis, qua describi potest ellipsis.* FIG. 16.

Et quoniam rectus est uterque angulorum BAD, XAY; iidem erunt æquales inter se: proindeque, ablato communi angulo DAX, erit etiam angulus BAX æqualis angulo DAY, sive ALH: & propterea duo triangula MNA, AHL etiam æquiangula erunt.

Ulterius MN quadratum est ad rectangulum ANB in ratione composita ex MN ad AN, & ex MN ad NB. Sed MN est ad AN, ut AH ad HL; itemque MN est ad NB, ut HL ad BH. Quare erit MN quadratum ad rectangulum ANB in ratione composita ex AH ad HL, & ex HL ad BH.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AH ad BH. Unde erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AH ad BH. Sed ex constructione AH est ad BH, ut AD ad AB. Et igitur erit rursus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

XII. Dis-

XII. *Quod altera ista ellipsim describendi ratio recidat in priorem paulo generaliorem.* Fig. 16.

XII. Dissimulandum autem hoc loco non est, quod *alter iste ellipsim describendi modus omnino recidat in eum, quem primo loco attulimus*. Si enim per punctum D ducamus rectam DE, diametro AB parallelam, cui latus AX occurrat in F; facile erit ostendere, portionem DF æqualem esse portioni AG, quam abscindit ex AD, producta si opus, recta BZ.

Quum enim rectus sit uterque angulorum XAY, DAH; iidem erunt æquales inter se: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit quoque angulus DAX æqualis angulo HAY: & propterea duo triangula AHL, ADF æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita AD ad DF.

Hinc, quum sit BH ad HL in ratione composita ex BH ad AH, & ex AH ad HL; habebit quoque BH ad HL rationem compositam ex BH ad AH, & ex AD ad DF. Sed ex constructione BH est ad AH, ut AB ad AD. Quare erit rursus BH ad HL in ratione composita ex AB ad AD, & ex AD ad DF.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AB ad DF. Unde erit ex æquali, ut BH ad HL, ita AB ad DF. Sed BH est ad HL, ut AB ad AG. Itaque erit rursus ex æquali, ut AB ad DF, ita AB ad AG: & propterea duæ portiones DF, AG æquales erunt inter se.

CAP. V.

Ratio describendi hyperbolam in plano per rectas solas explicatur.

I. TRadita ratione describendi ellipsim in plano per solas rectarum longitudines, *ad hyperbolam eodem pacto describendam* gradum nunc facimus. Dentur itaque in plano aliquo, tum magnitudine, cum positione, rectæ duæ AB, AD, sibi mutuo occurrentes in A. Et oporteat, in eodem plano describere hyperbolam, cujus AB sit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent esse parallelæ. 1. *Proponitur ratio describendi hyperbolam in plano per rectas solas.* Fig. 17.

Ducatur per punctum D recta DE, ipsi BA parallela. Tum capiantur aliæ duæ rectæ AX, BZ, quæ revolvantur circa puncta A, & B in ipso plano rectarum AB, AD. Fiat autem earum revolutio hac lege, ut portio DF, abscissa ex DE per priorem AX, sit perpetuo æqualis portioni AG, quam ex parametro AD, producta si opus, abscindit eodem tempore recta altera BZ. Dico, curvam, quæ in eodem plano rectarum AB, AD describitur continuis intersectionibus ipsarum AX, BZ, hyperbolam, quam quærimus, esse.

Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipsi AD parallela, quæ con-

conveniat cum AB, producta, in puncto N. Jamque erit punctum M in quæsita hyperbola, si utique ostendi possit, MN quadratum esse ad rectangulum ANB, ut est AD ad AB. Id vero ostendetur in hunc modum. Quadratum ex MN est ad rectangulum ANB in ratione composita ex MN ad AN, & ex MN ad NB; sive etiam in ratione composita ex AD ad DF, & ex AG ad AB. Sed, ob æquales DF, AG, duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AD ad AB. Itaque erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

II. *Monita pro allata hyperbola descriptione melius intelligenda.* Fig. 17.

II. Non ergo dubitari potest, quin mutuis intersectionibus rectarum AX, BZ describatur hyperbola, quam quærimus. Interim, ut *descriptio ejus melius intelligatur*, notandum est primo, quod ubi recta AX fertur circulariter ex AD versus AK, quam ipsi AB in directum esse suppono; tunc recta altera BZ ferri debeat circulari etiam motu ex BA versus BI, quam parametro BD suppono parallelam. Et quoniam revolutio harum rectarum ea lege fieri debet, ut portiones DF, AG, abscissæ per ipsas ex rectis DE, AD, sint perpetuo æquales inter se: perspicuum est, quod ubi recta AX pervenit ad AK, & infinitam adeo portionem abscindit ex DE; tunc altera BZ super BI reperiatur, quia hac ratione ipsa pariter ex AD infinitam portionem abscindet.

Notandum est etiam, quod quotiescumque eadem AX pergit moveri circulariter ex AK versus AH, quam ipsi AD in directum esse suppono; tunc recta altera BZ prosequi de-

debeat motum suum circularem ex BI versus BR, in quam AB, quum producitur, cadit. Et quoniam motus earundem rectarum ea adhuc lege fieri debet, ut portiones DF, AG, quas abscindunt ex ipsis DE, AD, ex altera parte productis, maneant semper æquales inter se: liquet, quod ubi recta AX pervenit ad AH, & nullam adeo portionem abscindit ex DE; tunc altera BZ super BR reperiatur, quia hac ratione ipsa etiam ex AD nullam portionem abscindet.

III. Atque hinc luce clarius apparet, *hyperbolam constare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum positis*, quæ simul junguntur in vertice A; *eique aliam opponi, duabus itidem ex partibus constantem*, quarum unio contingit in vertice altero B. Ubi enim recta AX fertur circulariter ex AD versus AK, describitur, primo hyperbolæ principalis pars illa, quæ existit in angulo DAK; tum ea hyperbolæ oppositæ, quæ jacet in angulo LBR. Quotiescumque vero eadem AX pergit moveri ex AK versus AH, primo quidem describitur pars illa hyperbolæ oppositæ, quæ continetur in angulo IBR; tum ea hyperbolæ principalis, quæ in angulo HAK reperitur.

III. *Figura hyperbolæ ex allata ejus descriptione deducitur.* FIG. 17.

Verum quidem est, quod motus rectæ AX continuari possit, usque donec integram circumvolutionem absolvat. Sed, continuando subinde ejus rectæ motum, haud novæ partes utrique hyperbolarum adduntur. Nam primo, quotiescumque recta AX fertur ex AH versus AB; tunc altera BZ prosequetur

mo-

motum suum ex BR versus BL, in quam BI, quum producitur, cadit. Quare, quum fiant earum rectarum intersectiones, primo quidem in angulo DAK, tum in angulo LBR; describentur eædem utriusque hyperbolæ portiones, quæ in angulis illis continentur. Et secundo, ubi eadem recta AX fertur ex AB versus AD; tunc altera BZ pergit moveri ex BL versus BA. Unde, quum earundem rectarum intersectiones fiant, primo quidem in angulo IBR, deinde vero in angulo HAK; describentur utriusque hyperbolæ portiones illæ, quæ in iisdem angulis existunt.

IV. *Proprietas hyperbolæ, quæ ex adducta ejus descriptione consequitur.* Fig. 17.

IV. Ex allata autem hyperbolæ descriptione perspicuum est, *ei id quidem contingere*, ut si per aliquod ejus punctum M ducantur ex diametri verticibus A, & B rectæ duæ AX, BZ; portiones DF, AG, quas ipsæ abscindunt ex rectis DE, AD, productis si opus, sint semper æquales inter se. Sed, si eædem AX, BZ protrahantur, usque donec conveniant cum rectis BL, IE, similiter si opus productis, in punctis O, & Q; erunt etiam æquales portiones BO, IQ.

Quum enim æquales sint inter se, tam duæ AD, BI, quam duæ DF, AG; erit, ut AD ad DF, ita BI ad AG. Sed, ob triangula æquiangula ADF, ABO, AD est ad DF, ut est BO ad AB; itemque, ob triangula æquiangula BIQ, BAG, BI est ad AG, ut est IQ ad AB. Itaque erit ex æquali, ut BO ad AB, ita IQ ad eandem AB: & propterea duæ BO, IQ æquales erunt inter se.

Hinc, per intersectionem rectarum AX,

BZ describetur quæsita hyperbola, non solum, quum rectæ illæ subinde revolvuntur circa puncta A, & B, ut portiones DF, AG quas abscindunt ex rectis DB, AD, productis si opus, sint perpetuo æquales inter se; verum etiam, quum suas circa puncta illa revolutiones subinde perficiunt, ut sint æquales portiones BO, IQ, quas abscindunt ex rectis BL, IE, similiter si opus productis.

V. Etsi autem æquales sint inter se, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ: perspicuum est tamen, *minui quidem istas, quum eæ augentur; & per contrarium augeri, quum eæ minuuntur*. Sed, tam *incrementum*, quam *decrementum* sit semper *ea lege*, ut rectangulum ex una illarum DF in unam istarum BO exhibeat ubique magnitudinem figuræ ipsius diametri AB. Nam, ob triangula æquiangula ADF, ABO, ut est AD ad DF, ita est BO ad AB: proindeque rectangulum ex DF in BO æquale erit rectangulo ex AD in DB, quod ex superius dictis constituit diametri figuram.

V. *Præcedentis proprietatis speciale quoddam accidens adnotatur.*

Fig. 17.

Hinc, quotiescumque æquales fiunt inter se omnes quatuor portiones DF, AG, BO, IQ, necesse est, ut unaquæque ipsarum media evadat proportionalis inter diametrum AB, & ejus parametrum AD; atque adeo, ut cujusque quadratum æquale fiat rectangulo BAD. Id vero contingit, quum rectæ duæ AX, BZ parallelæ fiunt inter se; & consequenter, ubi earum intersectio in infinitum abire supponitur.

Fig. 18.

Ubi enim punctum M abit in infinitum,

tunc duæ AN, NB æquales fiunt inter se; quum utraque infinita evadat, manente interim finita ipsarum differentia AB: proindeque erit, ut AN ad MN, ita NB ad eandem MN. Sed, ob triangula æquiangula ANM, ABO, AN est ad MN, ut AB ad BO; itemque, ob triangula æquiangula BNM, BAG, NB est ad MN, ut AB ad AG. Itaque erit ex æquali, ut AB ad BO, ita AB ad AG: & propterea duæ AG, BO æquales erunt inter se.

VI. *Quid peragendum, ut totius hyperbola descriptio haberi possit.* FIG. 17.

VI. Id quum ita sit, *juvat hic advertere*, quod etsi in describenda hyperbola revolutio rectarum AX, BZ temperari possit, tam æqualitate portionum DF, AG, quam æqualitate portionum BO, IQ; consultius fit tamen, adhibere æqualitatem illarum, quum describi debet hyperbola inferior, quæ transit per verticem A; & vicissim æqualitatem istarum, quum hyperbola superior, quæ traducitur per verticem B, est describenda.

Quantum enim ad portiones DF, AG; eæ, sicuti nullius magnitudinis sunt in vertice A, ita in recessu a vertice illo majores semper, ac majores fiunt, tandemque infinitæ evadunt in vertice altero B. Quare integra hyperbola, quæ ex principali, & opposita constat, numquam describi posset, si revolutio rectarum AX, BZ æqualitate earum portionum esset semper temperanda.

Quantum vero ad portiones BO, IQ; istæ per contrarium nullius magnitudinis sunt in vertice B, tum in recessu a vertice isto majores semper, ac majores fiunt, tandemque in vertice altero A infinitæ deprehenduntur.

tur. Unde integram hyperbolam numquam adhuc describere liceret, si ipsarum æqualitate revolutionem rectarum AX, BZ dirigere semper oporteret.

Quocirca, ut integræ hyperbolæ descriptio haberi possit, præstat, prius quidem adhibere æqualitatem portionum DF, AG; tum deinde æqualitatem portionum BQ, IQ in subsidium advocare. Et, ut idem sit terminus incrementi, tam illarum, quam istarum; describi poterit æqualitate priorum hyperbola principalis, quæ transit per verticem A; & æqualitate posteriorum hyperbola opposita, quæ transit per verticem alterum B.

VII. *Quomodo, data diametro cum positione suarum ordinatarum, determinari potest longitudo parametri.*

VII. Ex eo porro, quod æquales sint inter se, tam portiones DF, AG, quam portiones BO, IQ, *plura possunt obtineri, aliquem fortasse usum deinceps habitura.*

Nimirum primo *determinari potest longitudo parametri*, quotiescumque una cum hyperbola data est, tam diameter AB, quam positio suarum ordinatarum.

FIG. 17.

Sit enim AD, vel BL recta illa, cui omnes diametri ordinatæ sunt parallelæ. Et, sumpto in hyperbola puncto quovis M, agantur per illud ex verticibus diametri A, & B rectæ AX, BZ, quæ cum ipsis AD, BL conveniant in punctis G, & O.

Abscindatur deinde ex AB, utrinque producta, vel portio AS, æqualis ipsi AG, vel portio BT, æqualis ipsi BO. Et parametri longitudinem exhibebit, tam recta SF, parallela rectæ AD, & terminata ad rectam AX; quam recta TQ, parallela eidem

AD, & terminata ad rectam BZ.

VIII. *Quomodo definiri potest punctum, in quo recta, ex uno vertice ducta, secat hyperbolam.* FIG. 17.

VIII. Secundo *definiri potest punctum*, in quo recta AX, ducta ex vertice A, secat hyperbolam. Nimirum, si ex vertice altero B ducatur recta BZ, quæ abscindat, vel ex AD portionem AG, æqualem ipsi DF; vel ex IE portionem IQ, æqualem ipsi BO. Nam intersectio rectarum AX, BZ quæsitum punctum exhibebit.

Hinc, siquidem recta AX cadat super AD, quæ ducta est per verticem A diametri ordinatis æquidistanter, continget ea hyperbolam in solo puncto A. Nam in isto casu DF quidem evanescit, BO vero fit infinita. Quare, ut etiam evanescat AG, & infinita fiat IQ, ducenda erit recta altera BZ per ipsum verticem A.

Per contrarium vero, quotiescumque recta AX angulum constituit cum AD, tunc ea non solum in A, sed in alio quoque puncto secabit hyperbolam. Nam, ratione ejus anguli, est finitæ magnitudinis, tam portio DF, quam portio BO: proindeque recta altera BZ per ipsum verticem A transire non poterit.

Inde autem consequitur, quod si in plano descriptæ hyperbolæ detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela diametri ordinatis, semper ex vertice A duci possit recta alia, quæ ei parallela, secet hyperbolam in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum constituat cum AD.

IX. *Quomodo determinari potest punctum, in quo recta, ex*

IX. Denique *determinari potest punctum*, in quo recta BZ, ducta ex vertice B, secat hyperbolam. Nimirum, si ex vertice altero A du-

ducatur recta AX, quæ abscindat, vel ex DE portionem DF, æqualem ipsi AG; vel ex BL portionem BO, æqualem ipsi IQ. Nam intersectio rectarum BZ, AX quæsitum punctum exhibebit. *vertice alia ducta, hyperbolam secat.* FIG. 17.

Hinc, siquidem recta BZ cadat super BL, quæ ducta est per verticem B diametri ordinatis æquidistanter; continget ea hyperbolam in solo puncto B. Nam in isto casu AG quidem fit infinita, IQ vero evanescit. Quare, ut etiam infinita fiat DF, & BO evanescat, ducenda erit recta altera AX per ipsum verticem B.

Per contrarium vero, quotiescumque recta BZ angulum constituit cum BL, tunc non solum in B, sed in alio quoque puncto ea secabit hyperbolam. Nam, ratione ejus anguli, est finitæ magnitudinis, tam portio AG, quam portio IQ: proindeque recta altera AX per ipsum verticem B duci non poterit.

Huic autem consequens est, quod si in plano descriptæ hyperbolæ detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela diametri ordinatis, semper ex vertice B duci possit recta alia, quæ ei parallela, hyperbolam secet in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum constituat cum BL.

X. Cæterum haud quidem putandum est, hyperbolam in plano *per solas rectarum longitudines* dumtaxat *exposita ratione* posse describi. Vix enim ulla est ejus proprietas, ex qua *peculiaris* eam describendi modus nobis non subnascitur. Quin sæpe ex eadem proprietate possunt etiam *plures* derivari. X. *Hyperbola per solas rectarum longitudines descriptio altera paulo specialis.*

H 2 Ita,

FIG. 19. Ita, si angulus BAD, quem constituit diameter AB cum parametro AD, fuerit rectus; ope ejusdem illius proprietatis, quæ hyperbolæ competit relate ad diametrum, poterit etiam quæsita hyperbola describi in hunc alium modum.

Secetur diameter AB subinde in puncto H, ut AH sit ad BH, veluti est AD ad AB. Deinde, erecta super BH perpendiculari HL, revolvatur, tum circa verticem A angulus rectus XAY, cum circa verticem alterum B recta BZ.

Fiat porro utriusque revolutio ea lege, ut intersectio rectæ BZ cum latere anguli AY contingat semper super recta HL. Et intersectio ejusdem rectæ BZ cum latere altero AX optatam hyperbolam in plano delineabit.

XI. *Demonstratio alterius hujus rationis, qua describi potest hyperbola.* FIG. 19.

XI. Nec sane difficile erit, *hujus rei veritatem ostendere*. Ex aliquo enim intersectionis puncto M ducatur ad diametrum ordinata MN: quæ, quum sit ei perpendicularis, parallela erit ipsi HL: & consequenter duo triangula BNM, BHL æquiangula erunt.

Et quoniam rectus est uterque angulorum BAD, XAY; iidem erunt æquales inter se: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit etiam angulus BAY æqualis angulo DAX, sive AMN: & propterea duo triangula MNA, AHL etiam æquiangula erunt.

Ulterius MN quadratum est ad rectangulum ANB in ratione composita ex MN ad AN, & ex MN ad NB. Sed MN est ad AN, ut AH ad HL; itemque MN est ad NB, ut HL ad BH. Quare erit MN quadratum ad rectan-

ctangulum ANB in ratione composita ex AH ad HL, & ex HL ad BH.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AH ad BH. Unde erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AH ad BH. Sed ex constructione AH est ad BH, ut AD ad AB. Et igitur erit rursus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita AD ad AB.

XII. *Quod altera ista hyperbolam describendi ratio recidat in priorem paulo generaliorem.*

XII. Dissimulandum autem hoc loco non est, quod *alter iste hyperbolam describendi modus omnino recidat in eum, quem primo loco attulimus.* Si enim per punctum D ducamus rectam DE, diametro BA parallelam, cui latus AX occurrat in F; facile erit ostendere, portionem DF æqualem esse portioni AG, quam abscindit ex AD, producta si opus, recta BZ. FIG. 19.

Quum enim rectus sit uterque angulorum XAY, DAH; iidem erunt æquales inter se: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit quoque angulus DAX æqualis angulo HAY: & propterea duo triangula AHL, ADF æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita AD ad DF.

Hinc, quum sit BH ad HL in ratione composita ex BH ad AH, & ex AH ad HL; habebit quoque BH ad HL rationem compositam ex BH ad AH, & ex AD ad DF. Sed ex constructione BH est ad AH, ut AB ad AD. Quare erit rursus BH ad HL in ratione composita ex AB ad AD, & ex AD ad DF.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet AB ad DF. Unde erit ex æquali, ut BH ad HL, ita AB ad DF.

Sed BH est ad HL, ut AB ad AG. Itaque erit rursus ex æquali, ut AB ad DF, ita AB ad AG: & propterea duæ portiones DF, AG æquales erunt inter se.

C A P. VI.

Quo pacto describi possit parabola in plano per rectas solas, ostenditur.

I. *Proponitur ratio describendi parabolam in plano per rectas solas.* Fig. 20.

I. ILlud reliquum jam est, ut *qua ratione per solas linearum longitudines parabola in plano describi possit*, ostendamus. Dentur itaque positione in plano aliquo rectæ duæ AB, AD, sibi mutuo occurrentes in A; quarum prior AB sit terminata ad punctum A, indefinita vero versus B; altera AD sit etiam magnitudine data: Et oporteat, in eodem plano describere parabolam, cujus AB sit diameter, AD parameter diametri, & eadem AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ debent esse parallelæ.

Ducatur per punctum D recta DE, ipsi AB parallela. Tum capiantur aliæ duæ rectæ AX, GZ; quarum prior AX circa punctum A revolvatur; altera GZ moveatur subinde super AD, ut maneat ipsi AB, vel DE jugiter parallela. Ferantur autem rectæ istæ ea insuper lege, ut portio DF, abscissa ex DE per priorem AX, sit perpetuo æqualis portioni AG, quam ex parametro AD, producta si

opus

opus, abscindit eodem tempore recta altera GZ. Dico, curvam, quæ in eodem plano rectarum AB, AD describitur continuis intersectionibus ipsarum AX, GZ, parabolam, quam quærimus, esse.

Ex aliquo enim ejus curvæ puncto M ducatur recta MN, ipsi AD parallela, quæ conveniat cum AB in puncto N. Jamque erit punctum M in quæsita parabola, si utique ostendi possit, MN quadratum æquale esse rectangulo DAN. Id vero ostendetur in hunc modum. Quadratum ex MN est ad rectangulum DAN in ratione composita ex MN ad AD, & ex MN ad AN; sive etiam in ratione composita ex AG ad AD, & ex AD ad DF. Sed duæ istæ rationes componunt quoque rationem, quam habet AG ad DF, Itaque erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum DAN, ita AG ad DF; & propterea, sicuti duæ AG, DF inter se sunt æquales; ita erit MN quadratum æquale rectangulo DAN.

II. Non ergo dubitari potest, quin mutuis intersectionibus rectarum AX, GZ describatur parabola, quam quærimus. Interim, ut *descriptio ejus melius intelligatur*, notandum est primo, quod ubi recta AX fertur circulariter ex AD versus AB; tunc recta altera GZ ferri debeat rectilineo suo motu ex AB versus DE. Et quoniam motus harum rectarum ea lege fieri debet, ut portiones DF, AG, abscissæ per ipsas ex rectis DE, AD sint perpetuo æquales inter se; perspicuum est, quod ubi recta AX pervenit ad AB, & infinitam adeo portionem abscindit ex DE; tunc

II. *Monita pro allatæ parabolæ descriptione melius intelligenda.* FIG. 20.

altera GZ ab eadem AB infinite recedat, quia hac ratione ipsa quoque ex AD infinitam portionem abscindet.

Notandum est etiam, quod quotiescumque eadem AX pergit moveri circulariter ex AB versus AH, quam ipsi AD in directum esse suppono; tunc recta altera GZ intelligenda sit ex infinita distantia, ad quam abierat, accedere rursus ad AB per plagam oppositam. Et quoniam motus earundem rectarum ea adhuc lege perfici debet, ut portiones DF, AG, quas abscindunt ex ipsis DE, AD, ex altera parte productis, maneant semper æquales inter se: liquet, quod ubi recta AX pervenit ad AH, & nullam adeo portionem abscindit ex DE; tunc altera GZ super AB reperiatur, quia hac ratione ipsa etiam ex AD nullam portionem abscindet.

III. *Figura parabolæ ex allata ejus descriptione deducitur.* FIG. 20.

III. Atque hinc luce clarius apparet, *parabolam constare ex duabus partibus, hinc inde relate ad diametrum positis*, quæ simul junguntur in puncto A, vertice ejusdem diametri. Una siquidem describitur, quum recta AX fertur circulariter ex AD versus AB, eaque continetur in agulo BAD. Altera describitur, quum eadem AX moveri pergit ex AB versus AH, & pars ista continetur in angulo BAH. Nec sane, continuando motum ejusdem rectæ AX, usque donec circumferentiam integram absolvat, aliæ ei partes addi possunt.

Nam primo, quotiescumque recta AX fertur ex AH versus AK, quam ipsi AB in directum esse suppono; tunc altera GZ prosequeque-

quetur motum suum ex AB versus DE. Quare, quum fiant earundem rectarum intersectiones in angulo BAD; describetur eadem parabolæ portio, quæ in angulo illo continetur. Et secundo, ubi eadem recta AX fertur ex AK versus AD; tunc altera GZ redibit ad AB per plagam oppositam. Unde, quum earundem rectarum intersectiones fiant in angulo BAH; describetur parabolæ portio illa, quæ eo in angulo continetur.

IV. Ex allata autem parabolæ descriptione perspicuum est, *ei id quidem contingere*, ut si per aliquod ejus punctum M ducantur rectæ duæ AX, GZ, prior quidem pertinens ad verticem A, altera diametro AB parallela; portiones DF, AG, quas ipsæ abscindunt ex rectis DE, AD, productis si opus, sint perpetuo æquales inter se. Inde vero *plura possunt obtineri, aliquem fortasse usum deinceps habitura*. IV. *Proprietas parabolæ, quæ ex eadem descriptione consequitur, & quomodo per eam parameter definitur.* FIG. 20.

Nimirum primo *determinari potest longitudo parametri*, quotiescumque una cum parabola data est, tam diameter AB, quam positio suarum ordinatarum.

Sit enim AD recta illa, cui omnes diametri ordinatæ sunt parallelæ. Et, sumpto in parabola puncto quovis M, agantur per illud rectæ duæ AX, GZ, una pertinens ad verticem A, altera diametro AB parallela, quæ conveniat cum ejus parametro AD, producta si opus, in puncto G.

Abscindatur deinde ex diametro AB portio AS, æqualis ipsi AG. Et, ducta per punctum S recta SF, parallela rectæ AD, quæ

occurrat in F rectæ AX; exhibebit recta ista SF quæsitam parametri longitudinem.

V. *Quomodo definiri potest punctum, in quo recta, ex vertice ducta, parabolam secat.* Fig. 20.

V. Secundo *definiri potest punctum*, in quo recta AX, ducta ex vertice A, secat parabolam. Nimirum, si ducatur recta GZ, diametro AB parallela, quæ abscindat ex AD, producta si opus, portionem AG, æqualem ipsi DF. Nam intersectio rectarum AX, GZ quæsitum punctum exhibebit.

Hinc, siquidem recta AX cadat super AD, quæ ducta est per verticem A diametri ordinatis æquidistanter; continget ea parabolam in solo puncto A. Nam in isto casu portio DF evanescit. Quare, ut etiam evanescat portio AG, ducenda erit recta altera GZ per ipsum verticem A.

Per contrarium vero, quotiescumque recta AX angulum constituit cum AD, tunc non solum in A, sed in alio quoque puncto parabolam secabit. Nam, ratione ejus anguli est finitæ magnitudinis portio DF: proindeque recta altera GZ per ipsum verticem A transire non poterit.

Huic autem consequens est, qud si in plano descriptæ parabolæ detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela diametri ordinatis, semper ex vertice A duci possit recta alia, quæ ei parallela parabolam secet in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum constituat cum AD.

VI. *Quomodo determinari potest punctum, in quo recta, dia-*

VI. Denique *determinari potest punctum*, in quo recta GZ, ducta æquidistanter diametro AB, parabolam secat. Nimirum, si ex vertice A ducatur recta AX, quæ abscindat ex

DE,

DE, producta si opus, portionem DF, æqualem ipsi AG. Nam intersectio rectarum GZ, AX quæsitum punctum exhibebit.

metro parallela, parabolam secat.

FIG. 20.

Quemadmodum autem, finita existente portione DF, vel AG, rectæ duæ GZ, AX semper sese mutuo secant; ita omnis recta, quæ ducitur diametro AB parallela, ad finitam ab ea distantiam, omnino necesse est, ut parabolam secet. Et, sicuti intersectio rectarum GZ, AX contingit in unico puncto; sic eadem parallela in unico quoque puncto parabolam secabit.

Hinc vero consequitur, crura duo, quæ parabolam constituunt, quo magis a diametri vertice recedunt, eo majorem ab ipsa diametro distantiam sortiri. Unde etiam efficitur, ut parabola sit curva, quæ expanditur in infinitum, & quæ nec ex se sola, nec cum sua diametro spatium comprehendit.

VII. *Parabola per solas rectarum longitudines descriptio altera paulo specialis.*

FIG. 21.

VII. Cæterum haud quidem putandum est, parabolam in plano *per solas rectarum longitudines* dumtaxat *exposita ratione* posse describi. Vix enim ulla est ejus proprietas, ex qua *peculiaris* eam describendi modus nobis non subnascitur. Quin sæpe ex eadem proprietate possunt etiam *plures* derivari.

Ita, si angulus BAD, quem constituit diameter AB cum parametro AD, fuerit rectus; ope ejusdem illius proprietatis, quæ parabolæ competit relate ad diametrum, poterit etiam quæsita parabola describi in hunc alium modum.

Extendatur diameter BA usque ad H, ita, ut AH sit æqualis parametro AD. Deinde,

erecta ſuper BH perpendiculari HL, revolvatur circa verticem A angulus rectus XAY: eodemque tempore feratur ſuper AD recta GZ, ipſi AB æquidiſtanter.

Fiat porro utriuſque motus ea inſuper lege, ut interſectio rectæ GZ cum latere anguli AY contingat ſemper ſuper recta HL. Et interſectio ejuſdem rectæ GZ cum latere altero AX optatam parabolam in plano delineabit.

VIII.
Demonſtratio alterius hujus rationis, qua deſcribi poteſt parabola.
Fig. 21.

VIII. Nec ſane difficile erit, *hujus rei veritatem oſtendere*. Ex aliquo enim interſectionis puncto M ducatur ad diametrum ordinata MN: quæ, quum ſit ei perpendicularis; rectus erit angulus ANM; & conſequenter æqualis angulo AHL, qui ex conſtructione ſimiliter eſt rectus.

Et quoniam rectus eſt uterque angulorum DAH, XAY; iidem erunt æquales inter ſe: proindeque, ablato communi angulo DAY, ſupererit angulus HAY æqualis etiam angulo DAX: & propterea, quum angulus DAX æqualis ſit angulo AMN; erit eidem angulo AMN æqualis pariter angulus HAY.

Hinc duo triangula AHL, MNA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita MN ad AN. Sed AH eſt ad HL, ut AD ad MN; quum ſint æquales, tam duæ AH, AD, quam duæ HL, MN. Itaque erit ex æquali, ut AD ad MN, ita MN ad AN: & propterea MN quadratum rectangulo DAN æquale erit.

IX.
Quod altera

IX. Diſſimulandum autem hoc loco non eſt, quod *alter iſte parabolam deſcribendi modus*

dus omnino recidat in eum, quem primo loco attulimus. Si enim per punctum D ducamus rectam DE, diametro AB parallelam, cui latus AX occurrat in F; facile erit ostendere, portionem DF æqualem esse portioni AG, quam abscindit ex AD, producta si opus, recta GZ.

Ista parabolam describendi ratio recidat in priorem pantio generaliorem.

FIG. 21.

Quum enim rectus sit uterque angulorum XAY, DAH, iidem erunt æquales inter se: proindeque, ablato communi angulo DAY, erit quoque angulus DAX æqualis angulo HAY: & propterea duo triangula AHL, ADF æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH ad HL, ita AD ad DF.

Et quoniam æquales sunt inter se, tam duæ AH, AD, quam duæ HL, AG; erit quoque, ut AH ad HL, ita AD ad AG. Unde erit ex æquali, ut AD ad DF, ita AD ad AG; proindeque portiones duæ DF, AG æquales erunt inter se.

X. Cæterum *allatæ parabolam describendi rationes sunt illæ eædem, quibus, tum ellipsis, cum hyperbolæ descriptionem superius obtinuimus*. Quod enim hic recta GZ rectilineo motu feratur super AD; id exinde oritur, quod longitudo ipsius AB sit infinita. Nam profecto motus circularis in rectilineum vertitur, quotiescumque centrum ejus motus in infinitum abire supponitur.

X.

Monita circa utramque parabolam describendi rationem, & speciatim quod secunda etiam generalis esse possit.

FIG. 22.

Notatu autem hic dignum existimo, quod altera parabolam describendi ratio, non secus ac prima, obtineat etiam, quum angulus BAD nequaquam est rectus. Si enim rectam HL subinde inclinemus super BH, ut angulus

lus AHL æqualis sit angulo DAH; ipsumque angulum XAY, qui revolvitur circa verticem A, assumamus æqualem pariter angulo DAH: adhuc exposita ratione parabola describetur.

Ducatur similiter ex aliquo intersectionis puncto M ad diametrum AB ordinata MN. Et quoniam ordinata ista est ipsi AD parallela; erit angulus MNA æqualis angulo DAH. Sed ex constructione angulus DAH æqualis est angulo AHL. Quare erit etiam angulus MNA æqualis angulo AHL.

Rursus, quia positi sunt æquales anguli XAY, DAH; dempto ex iis communi angulo DAY, supererit angulus DAX æqualis etiam angulo HAY. Sed, ob parallelas AD, MN, angulus DAX æqualis est angulo AMN. Quare eidem angulo AMN erit pariter æqualis angulus HAY.

Hinc duo triangula AHL, MNA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AH, seu AD ad HL, ita MN ad AN. Sed, ob æquales angulos DAH, AHL, recta HL est æqualis ipsi AG, sive MN. Itaque erit quoque, ut AD ad MN, ita MN ad AN: & propterea MN quadratum æquale erit rectangulo DAN.

Nec silentio præteribimus, quod altera isthæc parabolam describendi ratio, etiam quum ad suam universalitatem evehitur, recidat in eam, quæ primo loco allata est. Nam ducta per punctum D recta DE, ipsi AB parallela, cum qua latus AX conveniat in F; adhuc portio DF æqualis fiet portioni AG.

LI-

LIBER III.

De Conicarum Sectionum Diametris aliis.

Conicæ sectiones, præter eam diametrum, quam in ipso cono sortiuntur, aliis etiam infinitis sunt præditæ, ad quas quum referuntur, iisdem proprietatibus gaudent. De aliis hisce diametris conicarum sectionum agendum nobis erit hoc libro: quas tamen methodo plane nova, nec adhuc ab ullo tentata independenter a tangentibus harum curvarum definire conabimur.

CAP. I.

Ellipsis omnes aliæ diametri definiuntur.

I. Quemadmodum in circulo quælibet diameter transit per centrum ejus; sic etiam in ellipsi, cujus species quædam est circulus, diametri omnes transeunt per punctum illud, quod ellipsis *centrum* appellatur. — I. *Quid sit centrum ellipsis, & cur tali nomine insignitur.* FIG. 23.

Est autem hoc punctum *id, quod bifariam dividit diametrum principalem*, sive quæ ex cono deducitur. Ut si AB sit diameter, quam ellipsis AMB sortitur in ipso cono, eadem-

demque secetur bifariam in puncto C; vocabitur punctum istud C centrum ipsius ellipsis.

Sortitum est vero tale nomen istiusmodi punctum; quia *omnis recta per ipsum ducta, & utrinque ad ellipsim terminata bifariam in eo dividitur.* Ducatur enim per punctum C recta quævis EF, quæ utrinque occurrat ellipsi in punctis E, & F. Dico, rectam istam EF secari bifariam in puncto C.

Demittantur namque ex punctis E, & F ordinatæ ad diametrum EG, FH. Quumque eæ inter se sint parallelæ; æquiangula erunt triangula CEG, CFH; proindeque erit, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita EG quadratum ad FH quadratum. Sed, propter ellipsim, EG quadratum est ad FH quadratum, ut rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Quare erit ex æquali, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum AHB.

Hinc, addendo antecedentes consequentibus, erit etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita CA quadratum ad CB quadratum; & consequenter latera horum quadratorum CG, CH, CA, CB pariter proportionalia erunt. Sed, ob eadem triangula æquiangula CEG, CFH, CG est ad CH, ut CE ad CF. Itaque erit ex æquali, ut CA ad CB, ita CE ad CF: & propterea, sicuti duæ CA, CB inter se sunt æquales; sic & duæ CE, CF similiter inter se æquales erunt.

II. *Theorema fundamentale pro de-*

II. Ut autem pateat, quod sit diameter ellipsis recta quælibet, ducta per centrum, & utrinque ad eam terminata; *ostendendum est*

prius

prius sequens theorema. Nimirum, quod si EF sit aliqua istarum rectarum, eaque bisecet in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A, & demissa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela ducatur OL; fit semper, ut CL ad CG, ita CG ad CA.

terminandis ellipseos diametris aliis FIG. 23.

Nec sane difficile erit theorema istud ostendere. Nam, siouti AM dupla est ipsius AO; ita, ducta ad diametrum AB ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipsius AL. Unde, quum sit etiam diameter AB dupla ipsius AC; erit reliqua NB dupla pariter reliquæ LC: & propterea rectangulum ANB erit quadruplum rectanguli ALC.

Et quoniam MN dupla est etiam ipsius OL; erit MN quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex OL. Quare erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita OL quadratum ad rectangulum ALC. Sed, propter ellipsim, MN quadratum est ad rectangulum ANB, ut EG quadratum ad rectangulum AGB, Itaque erit ex æquali, ut OL quadratum ad rectangulum ALC, ita EG quadratum ad rectangulum AGB; & consequenter permutando erit quoque, ut OL quadratum ad EG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB.

Hinc, quum, ob triangula æquiangula COL, CEG, OL quadratum sit ad EG quadratum, ut CL quadratum ad CG quadratum; erit rursus ex æquali, ut CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB: & propterea, addendo antecedentes consequentibus, erit etiam, ut

CL quadratum ad CG quadratum, ita rectangulum ACL ad AC quadratum, hoc est, ita CL ad AC: proindeque tres rectæ CL, CG, CA continue proportionales erunt.

III. *Præcedentis theorematis consectarium primum.* FIG. 23.

III. Inde vero *sequitur primo*, quod si ex punctis A, & E ducantur rectæ AK, EI, ipsis EG, AM parallelæ, quarum prior AK conveniat cum EF in puncto K, & altera EI cum AB in puncto I; triangulum EGI sit æquale trapetio AGEK.

Est enim ex ostensis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL est ad CG, ut CO ad CE; sive etiam, ut CA ad CI. Quarè erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CA ad CI: & propterea, quum tres rectæ CG, CA, CI sint continue proportionales; erit quoque, ut CG ad CI, ita CG quadratum ad CA quadratum.

Jam, propter communem altitudinem triangulorum CEG, CEI, CG est ad CI, ut est triangulum CEG ad triangulum CEI; itemque, ob similia triangula CEG, CKA, CG quadratum est ad CA quadratum, ut triangulum CEG ad triangulum CKA. Quare erit rursus ex æquali, ut triangulum CEG ad triangulum CEI, ita idem triangulum CEG ad triangulum CKA.

Hinc triangula duo CEI, CKA æqualia erunt inter se: & propterea, dempto ex iis communi triangulo CEG, supererit triangulum EGI æquale trapetio AGEK. Et si auferatur adhuc commune trapetium AGEX; remanebit quoque triangulum XAI æquale triangulo XEK.

IV. Iisdem positis, *sequitur secundo*, quod

trian-

triangulum AOK sit æquale trapetio EOAI. IV. *Consectarium secundum.* Fig. 23.

Est enim ex ostensis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Sed CL est ad CG, ut CO ad CE; itemque CG est ad CA, ut CE ad CK. Quare erit ex æquali, ut CO ad CE, ita CE ad CK: & propterea, quum tres rectæ CO, CE, CK sint continue proportionales; erit quoque, ut CO ad CK, ita CO quadratum ad CE quadratum.

Jam, propter communem altitudinem triangulorum CAO, CAK, CO est ad CK, ut est triangulum CAO ad triangulum CAK; itemque, ob similia triangula CAO, CIE, CO quadratum est ad CE quadratum, ut triangulum CAO ad triangulum CIE. Quare erit rursus ex æquali, ut triangulum CAO ad triangulum CAK, ita idem triangulum CAO ad triangulum CIE.

Hinc triangula duo CAK, CIE æqualia erunt inter se: proindeque, dempto ex iis communi triangulo CAO, supererit triangulum AOK æquale trapetio EOAI. Id vero erui quoque potest ex æqualitate triangulorum XAI, XEK superius ostensa. Nam, addito iis communi trapetio AOEX, fiet trapetium EOAI æquale triangulo AOK.

V. Capiatur porro in ellipsi punctum quodvis aliud P, ex quo ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipsis EI, EG parallelæ. Et *facile erit ostendere*, quod triangulum PQS sit etiam æquale correspondenti trapetio AQRK. V. *Consectarium tertium.* Fig. 23. 24.

Quum enim similia sint triangula CAK, CGE; erit, ut CA quadratum ad CG quadra-

 tum,

tum, ita triangulum CAK ad triangulum CGE. Quare convertendo erit etiam, ut CA quadratum ad rectangulum AGB, ita triangulum CAK ad trapetium AGEK.

Eadem ratione, quum similia sint triangula CAK, CQR; erit, ut CA quadratum ad CQ quadratum, ita triangulum CAK ad triangulum CQR. Unde convertendo erit quoque, ut CA quadratum ad rectangulum AQB, ita triangulum CAK ad trapetium AQRK.

Hinc autem, per æqualitatem rationis ordinatam, erit pariter, ut rectangulum AGB ad rectangulum AQB, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: adeoque, quia, propter ellipsim, rectangulum AGB est ad rectangulum AQB, ut EG quadratum ad PQ quadratum; erit ex æquali, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK.

Et quoniam ex constructione parallelæ sunt inter se, tam duæ EG, PQ, quam duæ EI, PS; triangula duo EGI, PQS similia erunt. Unde, quum sit, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita triangulum EGI ad triangulum PQS; erit rursus ex æquali, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita trapetium AGEK ad trapetium AQRK: & propterea, quemadmodum triangulum EGI ostensum est æquale trapetio AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale trapetio AQRK.

VI. *Confectarium quartum.*

VI. Denique, si recta PS, ipsi EI parallela, conveniat cum recta EF in puncto V, *nullo negotio ostendemus quoque*, quod triangu-

gulum PVR sit æquale correspondenti trapetio EVSI.

Ponamus etenim primo, quod punctum S sit supra verticem A, & quod punctum P existat inter A, & E. Quia igitur triangulum EGI ostensum est æquale trapetio AGEK, & triangulum PQS æquale trapetio AQRK: si ex triangulo auferatur triangulum, ex trapetio trapetium, ex utroque autem commune trapetium PQGZ; supererit trapetium EZSI æquale trapetio PZER: proindeque, addito communi triangulo EZV, fiet trapetio EVSI æquale triangulum PVR. Fig. 23.

Ponamus secundo, quod punctum S sit quidem supra verticem A, sed quod punctum P sit ad alteram partem puncti E relate ad eundem verticem A. Et rursus, quia triangulum EGI ostensum est æquale trapetio AGEK: addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale trapetio AQRK, sive etiam triangulo PQS: & proinde, dempto communi trapetio VSQR, fiet trapetio EVSI rursus æquale triangulum PVR.

Ponamus denique, quod punctum S sit infra verticem A. Et quoniam triangulum PQS ostensum est æquale trapetio AQRK: addito, vel dempto communi trapetio VSQR, fiet triangulum PVR æquale trapetio ASVK. Sed, propter æqualitatem triangulorum XEK, XAI, superius ostensam, trapetium ASVK est æquale trapetio EVSI. Quare etiam triangulum PVR æquale erit trapetio EVSI. Fig. 24.

VII. Priusquam ulterius progrediamur, *notatu hic dignum existimo*, quod punctum P VII. *Monitum*

circa postrema duo consectaria. Ita quidem a nobis sumptum est in ellipsi, ut ordinata PQ, exinde ducta ad diametrum

FIG. 23. 24. AB, cadat supra centrum ellipsis. Sed fieri quoque potest, ut eadem illa ordinata, vel ad centrum dirigatur; vel etiam cadat infra centrum.

Quotiescumque ordinata PQ dirigitur ad centrum; liquido patet, trapetium AQRK non differre a triangulo CAK. Sed, ubi eadem ordinata cadit infra centrum; tunc loco trapetii AQRK sumenda est differentia triangulorum CAK, CQR, quam in omni casu trapetium illud adæquat.

Similiter idem punctum P subinde quidem a nobis sumptum est in ellipsi, ut recta PS, exinde ducta æquidistanter ipsi EI, conveniat cum EF supra centrum ellipsis. Sed fieri quoque potest, ut eadem recta PS conveniat cum EF, vel in ipso centro, vel etiam infra centrum.

Quotiescumque recta PS occurrit alteri EF in ipso centro; manifestum est, trapetium EVSI non differre a triangulo CEI. Sed, ubi occursus fit infra centrum; tunc loco trapetii EVSI sumenda est differentia triangulorum CEI, CVS, quam in omni casu trapetium illud adæquat.

VIII. *Ostenditur, quod omnis recta, ducta per centrum, sit diameter ellipsis.*

VIII. His præmissis, facile modo erit ostendere, quod *sit diameter ellipsis recta quælibet, ducta per centrum, & utrinque ad eam terminata*. Ut enim talis esse possit, duo quidem requiruntur. Primum, ut bisecet rectas omnes, alicui æquidistanter ductas, & utrinque

FIG. 23. 24. terminatas ad ellipsim. Deinde, ut quadrata

ex

ex semissibus istarum rectarum sint, ut rectangula, quæ sub correspondentibus ipsius portionibus continentur.

Jam horum utrumque facili negotio demonstrabitur. Quantum enim ad primum, sit EF recta quævis ducta per centrum C, eaque bisecet in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A diametri principalis. Dico, eandem EF secare quoque bifariam in V, quamvis aliam rectam PP, quæ ipsi AM parallela, utrinque ad ellipsim terminatur.

Positis enim omnibus, ut supra; erit utrumque triangulorum PVR, PVR æquale trapetio EVSI. Quare æqualia erunt inter se ipsa duo triangula PVR, PVR. Sed eadem triangula, velut similia, sunt ut quadrata laterum homologorum PV, PV. Itaque latera isthæc homologa PV, PV erunt pariter æqualia; & consequenter tota PP bifariam secta erit in V.

IX. Quantum vero ad secundum, *nec etiam magno mentis acumine opus est, ad illud ostendendum*. Maneant enim omnia, adhuc ut supra. Et dico insuper, quadrata ipsarum AO, PV esse inter se, ut rectangula correspondentia EOF, EVF.

IX. *Pars altera demonstrationis, quæ præcedens veritas evincitur.* FIG. 23. 24.

Quum enim similia sint triangula CEI, COA; erit, ut CE quadratum ad CO quadratum, ita triangulum CEI ad triangulum COA. Quare convertendo erit etiam, ut CE quadratum ad rectangulum EOF, ita triangulum CEI ad trapetium EOAI.

Eadem ratione, quum similia sint triangula CEI, CVS; erit, ut CE quadratum ad

CV quadratum, ita triangulum CEI ad triangulum CVS. Unde convertendo erit quoque, ut CE quadratum ad rectangulum EVF, ita triangulum CEI ad trapetium EVSI.

Hinc autem, per æqualitatem rationis ordinatam; erit pariter, ut rectangulum EOF ad rectangulum EVF, ita trapetium EOAI ad trapetium EVSI: adeoque, quia trapetia ista ostensa sunt æqualia triangulis AOK, PVR; erit ex æquali, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

Quoniam vero ex constructione parallelæ sunt inter se, tam duæ AK, PR, quam duæ AO, PV; triangula duo AOK, PVR similia erunt. Quare, quum sit, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita triangulum AOK ad triangulum PVR; erit rursus ex æquali, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita rectangulum EOF ad rectangulum EVF.

X. *Quod ea tantum recta sint ellipsis diametri, quæ transeunt per centrum.* FIG. 23. 24.

X. Non ergo dubitari potest, quin recta EF, ducta per centrum C, & utrinque ad ellipsim terminata, sit ejus diameter. Nam & bifariam dividit rectas omnes, quæ subtensæ AM æquidistantes, utrinque ad curvam terminantur. Et quadrata ex semissibus istarum rectarum servant inter se eandem rationem, quam habent rectangula, sub correspondentibus ipsius EF portionibus contenta.

Sed facile erit etiam ostendere, quod *præter eas, quæ transeunt per centrum ellipsis, nulla alia recta linea possit esse diameter ejus.* Ut enim recta aliqua esse queat diameter ellipsis, illud primo requiritur, ut bifariam secet

cet rectas omnes, alicui æquidistanter ductas, & utrinque ad ellipsim terminatas. Unde, si ostendi possit, accidens istud iis tantummodo rectis competere, quæ transeunt per centrum ellipsis; jam veritas ejus, de quo agitur, liquido constabit.

Id vero ostendetur in hunc modum. Sit TY recta positione data, cui debent esse parallelæ eæ omnes, quæ bifariam a diametro dividuntur. Jamque, si ea parallela est ordinatis diametri principalis AB; secabit diameter ista AB bifariam rectas omnes, quæ ipsi TY æquidistantes, utrinque ad ellipsim terminantur.

Quod si autem recta TY non sit parallela ordinatis diametri principalis AB; per ea, quæ superius ostensa sunt, semper ex vertice hujus A duci poterit recta alia AM, quæ illi parallela, ellipsim secet in alio puncto. At rectas omnes ipsi AM æquidistanter ductas, & utrinque ad ellipsim terminatas, ut modo vidimus, non alia bisecat recta, quam quæ transit per centrum G, & bifariam dividit subtensam ipsam AM.

XI. Cæterum circa diametros ellipsis illud notare sedulo oportet, quod *si aliqua extiterit diameter, ordinatis alterius parallela, ista vicissim illius ordinatis æquidistans esse debeat*. Sit enim AB ellipsis diameter aliqua, ejusque ordinatis parallela sit diameter alia EF. Dico, vicissim diametrum AB parallelam esse ordinatis ipsius EF.

XI. *Quod nequeat una diameter parallela esse ordinatis alterius, nisi & ista æquidistans sit ordinatis illius.*

FIG. 25.

Ducatur siquidem recta MP, ipsi AB parallela, quæ utrinque ad ellipsim terminata con-

conveniat cum EF in V. Jamque, actis ad eandem AB ordinatis MN, PQ, erunt istæ æquales inter se, velut parallelogrammi MQ latera opposita; & consequenter erunt etiam æqualia rectangula ANB, AQB, quæ illarum quadratis proportione correspondent.

Hinc, detractis rectangulis istis ex æqualibus quadratis CA, CB; æqualia erunt pariter reliqua quadrata CN, CQ; atque adeo æqualia quoque ipsa horum quadratorum latera CN, CQ. Sed, propter parallelogramma CM, CP, duæ CN, CQ sunt æquales duabus MV, PV. Itaque MV, PV etiam inter se æquales erunt: & propterea tota PM bisecta erit in V.

XII. *Demonstrationis pars altera, & quod bina illa diametri vocentur conjugata.* FIG. 25.

XI. Secat igitur EF bifariam rectas omnes, quæ ipsi AB æquidistantes, utrinque ad ellipsim terminantur. Unde, *ut veritas ejus, de quo agitur, omnimode constet*, ostendendum est quoque, quadrata ex semissibus istarum rectarum esse, ut rectangula, quæ sub correspondentibus portionibus ipsius EF continentur; hoc est, AC quadratum esse ad MV quadratum, ut est rectangulum ECF ad rectangulum EVF.

Id autem ostendetur hac ratione. Quoniam EC, MN sunt ordinatæ diametri AB; erit EC quadratum ad MN, seu CV quadratum, ut est rectangulum ACB, seu AC quadratum ad rectangulum ANB. Itaque convertendo erit etiam, ut EC quadratum, seu rectangulum ECF ad rectangulum EVF, ita AC quadratum ad CN, seu MV quadratum.

Nulli ergo dubium esse potest, quod si ali-

aliqua ellipsis diameter parallela sit ordinatis alterius diametri, ista per contrarium æquidistans esse debeat ordinatis illius. Binæ autem istæ diametri, quarum altera alterius ordinatis æquidistat, sæpius deinceps sub contemplationem venient. Et, ut commodius distingui possint, vel ambas simul *conjugatas*, vel alteram alterius *conjugatam* appellabimus.

CAP. II.

Diametrorum ellipsis communia quædam ostenduntur.

I. Vidimus præcedenti capite, ellipsim, præter eam diametrum, quam in ipso cono sortitur, alias etiam innumeras habere, quarum quælibet transit per centrum ipsius ellipsis. Sed *communia harum diametrorum*, operæ pretium est, ut paulo distinctius prosequamur. Quem in finem ellipsis AMB sit AB diameter principalis, centrum punctum D, & EF alia quævis diameter. I. *Proprietates diametri principalis ad omnes alias diametros ellipsis traducuntur.* FIG. 26.

Primo igitur, quemadmodum diameter principalis AB suas habet ordinatas; ita suis quoque refertur ordinatis diameter alia EF. Sunt autem ex ostensis ordinatæ istæ rectæ illæ omnes, quæ ducuntur æquidistanter subtensæ AM, quam ab ipsa EF suppono bisectam in puncto O.

Deinde, quemadmodum quadrata ordinatarum diametri principalis AB sunt inter

se,

se, ut rectangula, sub correspondentibus ejus portionibus contenta; ita & quadrata ordinatarum alterius diametri EF sunt proportionalia rectangulis, quæ continentur sub portionibus correspondentibus ipsius EF.

Unde porro, si per verticem E ducatur recta EH ordinatis æquidistanter, quæ sit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO sit ad rectangulum EOF, veluti est EH ad EF; erit in hac eadem pariter ratione quadratum cujuslibet alterius ordinatæ PV ad rectangulum EVF.

Et quemadmodum rectam istam EH appellare licebit *parametrum* diametri EF; ita si jungatur FH, cum qua conveniat in X ordinata quævis PV; erit PV quadratum æquale rectangulo EVX, & consequenter minus rectangulo, quod fit ex parametro EH in abscissam correspondentem EV.

Quin & defectus ipsius PV quadrati a rectangulo HEV erit similiter rectangulum aliud, quod habens pro sua latitudine eandem abscissam EV, est simile, similiterque positum ei, quod fit ex parametro EH in ipsam diametrum EF.

II. *Communes quoque sunt proprietates, quas ex ellipsis descriptione deduximus.*

II. Hæc quum ita sint, perspicuum est, *omnes illas proprietates, quæ ellipsi competunt relate ad diametrum principalem, obtinere etiam, quum ad aliam quamvis diametrum ellipsis ipsa refertur.*

FIG. 26. Hinc ulterius, sicuti describitur ellipsis in plano, per solas rectarum longitudines, data magnitudine, & positione, tam diametro principali AB, quam parametro ejus AD; sic etiam

etiam describi poterit eadem ellipsis, ubi magnitudine, & positione datur, tum alia quævis diameter EF, cum illius parameter EH.

Et sicuti recta AD, ducta per verticem A ipsius diametri principalis AB, æquidistanter suis ordinatis, contingit ellipsim in solo puncto A; ita etiam recta EH, ducta per verticem E alterius cujuslibet diametri EF, similiter ordinatis suis æquidistanter, dumtaxat in puncto E tanget ellipsim.

Quin imo, sicuti omnis alia recta, quæ ducta ex eodem vertice A, angulum constituit cum AD, non solum in A, sed in alio quoque puncto secat ellipsim; sic pariter quælibet alia recta, quæ ducta ex eodem vertice E angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in puncto alio occurret eidem ellipsi.

Unde etiam, si in plano ipsius ellipsis detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela ordinatis cujuslibet alterius diametri EF, semper ex vertice E duci poterit recta alia, quæ ei parallela, ellipsim secet in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum contineat cum EH.

III. Sed, his ita se habentibus, liquet quoque, quod *sicuti ex diametro principali transire licuit ad alias diametros; sic vicissim ex qualibet alia diametro, tum ad ipsam principalem, cum ad alias omnes progredi licebit.* III. *Quod ex qualibet ellipsis diametro transiri possit in omnes alias.*

Nam semper ac eædem sunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamentale, quod præcedenti capite ostensum est relate ad diametrum principalem, poterit FIG. 26.

terit eadem omnino ratione demonstrari de quavis alio diametro EF.

Itaque, si per centrum ellipsis C ducatur recta aliqua AB, quæ bisecet in G subtensam PE, pertinentem ad verticem E; & demissa ad diametrum EF ordinata PV, huic per punctum G parallela agatur GR, erit, ut CV ad CR, ita CR ad CE.

Unde, quum omnes illæ æqualitates triangulorum, trapetiorumque, quas superiori capite prosecuti sumus relate ad diametrum principalem, obtineant quoque respectu ipsius diametri EF; facile erit ostendere, rectam illam AB esse diametrum quoque ipsius ellipsis.

Inde enim conficitur, ipsam AB secare bifariam rectas omnes, æquidistanter ductas subtensæ PE, & utrinque terminatas ad ellipsim; itemque quadrata ex semissibus istarum rectarum proportionalia esse rectangulis, quæ sub correspondentibus portionibus ipsius AB continentur.

IV.
Aliarum diametrorum ellipsis proprietas communis, respiciens rectas, quas bisecat.

IV. Habent igitur omnes aliæ ellipsis diametri easdem omnino proprietates cum diametro principali; & ex qualibet earum, tum ad ipsam principalem, cum ad alias omnes progredi licet. Sed ellipseos diametri, *præter hactenus recensitas proprietates, plures alias communes habent*, quas non abs re erit hic breviter ostensas exhibere.

Ac principio quidem illud nobis est ostendendum, quod *quælibet diameter ellipsis non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, dividat bifariam, quam quæ, vel transeunt*

seunt per centrum, vel ordinatim ad ipsam diametrum applicantur.

Sit enim AB ellipsis AMB diameter quævis, sitque etiam AD recta illa, cui omnes ejus diametri ordinatæ sunt parallelæ. Ducatur in ellipsi recta PP, quæ utrinque ad curvam terminata, nec transeat per centrum C, nec sit ordinatim applicata diametro AB. Dico, eam ab ipsa diametro AB non posse secari bifariam. FIG. 24.

Si enim fieri potest, secetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Et quoniam ea non est parallela ordinatis ipsius AB; ex superius ostensis duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipsi PP parallela ellipsim secet in alio puncto. Ducatur itaque recta ista, & sit AM. Tum, bisecta ea in puncto O, jungatur CO, quæ extendatur usque donec occurrat ellipsi in punctis E, & F.

Quia igitur recta EF transit per centrum C, & bisecat in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A; per superius ostensa secabit quoque bifariam in V rectam PP, ipsi AM parallelam. Sed ex hypothesi recta PP secatur bifariam in S. Quare eadem PP bisecta erit, tam in puncto S, quam in puncto V. Quod fieri non potest.

V. *Quomodo data ellipsis, sive centrum, sive diameter aliqua potest reperiri.*

V. Ex eo autem, quod quælibet diameter ellipsis eas tantum rectas, utrinque ad curvam terminatas, bifariam dividat, quæ vel transeunt per centrum, vel ordinatim ad ipsam applicantur: sequitur per contrarium, ut *si aliqua ellipsis diameter bisecet rectam aliquam, non transeuntem per centrum, & utrinque ter-*

terminatam ad ellipsim, hæc esse debeat diametri illius ordinata.

Unde ulterius consequitur, ut *si recta aliqua bisecet alias duas æquidistantes, & utrinque ad ellipsim terminatas, ea esse debeat diameter ipsius ellipsis, atque adeo transire per centrum*. Nam aliter, ducta per punctum bisectionis unius ex rectis æquidistantibus, & centrum recta alia, hæc velut diameter bisecabit quoque rectam aliam æquidistantem. Quod fieri non potest.

Id vero quum ita sit, facile erit, *cujuslibet datæ ellipsis, sive centrum, sive diametrum aliquam reperire*. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam ellipsim rectas duas æquidistantes, & utrinque ad curvam terminatas. Nam, sicuti recta, quæ eas bifariam dividit, diameter erit ellipsis; sic & punctum, quod bisecat diametrum istam, ejusdem centrum exhibebit.

VI. *Quod in omni ellipsi reperire liceat diametrum, quæ rectos angulos constituat cum suis ordinatis.* Fig. 27.

VI. Speciatim in omni ellipsi reperire licet *diametrum, quæ cum suis ordinatis rectos angulos constituat*. Inveniatur siquidem ipsius datæ ellipsis diameter quævis EF, sitque EH recta illa, cui omnes istius diametri ordinatæ debent esse parallelæ. Jamque, si angulus FEH fuerit rectus, erit ipsa EF diameter optata. Quod si secus contigerit, inveniemus diametrum, quam quærimus, sequenti ratione.

Super diametro EF describatur semicirculus EPF, qui necessario secabit ellipsim in puncto aliquo P. Jungantur deinde rectæ PE, PF, quæ secentur bifariam in punctis G, & I. Agantur porro per puncta ista

dia-

diametri KL, AB. Et utraque harum diametrorum eam, quam quærimus, exhibebit.

Ob rectas enim PE, EF bisectas in punctis G, & C, GE est ad GP, ut CE ad CF. Quare diameter KL ipsi PF parallela erit; adeoque angulus CGE æqualis erit angulo FPE. Sed, propter semicirculum, angulus FPE est rectus. Itaque etiam angulus CGE rectus erit; & consequenter diameter KL cum suis ordinatis rectos angulos constituet.

Eadem ratione, ob rectas EF, PF bisectas in punctis C, & I, CE est ad CF, ut PI ad IF. Itaque diameter AB ipsi PE parallela erit; atque adeo angulus CIF æqualis erit angulo EPF. Sed, propter circulum, angulus EPF est rectus. Quare rectus erit quoque angulus CIF: & propterea diameter AB cum ordinatis suis rectos angulos continebit.

VII. Neque vero difficile erit ostendere *id, quod in constructione assumptum est*, nimirum, quod semicirculus, descriptus super diametro EF, occurrere debeat ellipsi in puncto aliquo P. Quum enim recta EH non sit perpendicularis ipsi EF, utique semicirculus ille, necesse est, ut secet, vel ipsam EH, vel eam, quæ ducitur per punctum F eidem EH æquidistanter. VII. *Demonstratio ejus, quod assumptum est in præcedenti constructione.* FIG. 27.

Ponamus, semicirculum illum secare rectam EH. Id itaque fiet, quia recta EH constituet cum diametro EF angulum acutum versus eam partem, in qua semicirculus describitur. Quare recta, quæ ducitur per punctum F, ipsi EH parallela, efficiet cum eadem EF angulum obtusum: & propterea

perpendicularis, quæ ex eodem puncto F erigitur super EF, secabit ellipsim versus eam partem, in qua semicirculus reperitur.

Jam semicirculus, descriptus super diametro EF, ut ellipsim secare nequeat, necesse plane est, ut cadat totus, vel intra, vel extra eam. Sed horum utrumque fieri nequit. Non enim primum; quia sic minime conveniret cum recta EH, quam tamen necessario secare debet. Nec item secundum; quia eo pacto occurreret perpendiculari, ex puncto F erectæ super EF, quæ tamen tota extra eum cadat oportet.

VIII. *De duobus axibus ellipsis, & quod ipsa abeat in circulum quum illi sunt æquales.*

VIII. In qualibet igitur ellipsi existunt binæ diametri, quæ rectos cum suis ordinatis angulos constituunt. Hujuscemodi diametros, quas liquet esse conjugatas, vocabimus in posterum *axes* ipsius ellipsis; *eosque non aliter inter se mutuo æquales esse posse, quam ubi ellipsis ipsa abit in circulum*, facile erit ostendere.

FIG. 27. Sint enim AB, KL axes ellipsis AMB. Dico, ellipsim ipsam circulum fieri, ubi æquales sunt inter se duo illi axes AB, KL.

Ducatur ad axem unum AB ordinata quævis MN. Et quoniam KC, MN sunt ordinatæ binæ ipsius AB; erit, ut KC quadratum ad MN quadratum, ita rectangulum ACB, sive AC quadratum ad rectangulum ANB. Sed, ob axium æqualitatem, KC quadratum est æquale AC quadrato. Quare etiam MN quadratum erit æquale rectangulo ANB.

Est igitur curva AMB talis naturæ, ut demissa ex aliquo ejus puncto M perpendicu-

lari

lari MN super AB, sit semper MN quadratum æquale rectangulo ANB, contento sub correspondentibus portionibus ipsius AB. Unde, quum hæc sit circuli proprietas essentialis, ipsa curva AMB circulus erit.

IX. Quemadmodum axes ellipsis æquales inter se mutuo esse non possunt, nisi, quum ellipsis ipsa abit in circulum; ita, *descriptis super iis, velut diametris, circulis duobus, cadet totus intra ellipsim, qui describitur super axe minore; & vicissim totus extra eam, qui describitur super axe majore.* IX. *Quomodo circuli super axibus descripti, se habent relate ad ellipsim.*

Sint enim AB, KL axes ellipsis AMB; sitque etiam AB axis major, & KL axis minor. Describantur super iis, velut diametris, circuli duo. Dico, eum, qui describitur super AB, cadere totum extra ellipsim; per contrarium vero illum, qui describitur super KL, cadere totum extra eam. FIG. 28.

Sumatur in ellipsi punctum quodvis M, ex quo ducantur ad axes ordinatæ MN, MO, quæ conveniant cum circulis, descriptis super iis, in punctis P, & Q. Ostendendum est igitur, PN quidem majorem esse, quam MN; QO vero minorem, quam MO. Id autem ostendemus in hunc modum.

Quoniam KL minor est, quam AB; erit quoque KC quadratum minus rectangulo ACB. Sed, ob ellipsim, KC quadratum est ad MN quadratum, ut rectangulum ACB ad rectangulum ANB. Quare etiam MN quadratum minus erit rectangulo ANB: & propterea, quum, propter circulum, PN quadratum sit æquale rectangulo ANB; erit PN major, quam MN.

Eadem ratione, quoniam AB major est, quam KL; erit quoque AC quadratum majus rectangulo KCL. Sed, ob ellipsim, AC quadratum est ad MO quadratum, ut rectangulum KCL ad rectangulum KOL. Quare etiam MO quadratum majus erit rectangulo KOL: & propterea, quia, propter circulum, QO quadratum est æquale rectangulo KOL; erit QO minor, quam MO.

X. *De angulis, quos aliæ ellipsis diametri cum ordinatis suis constituunt.* Fig. 29.

X. Jam, *ut aliqua dicamus de angulis, quos aliæ ellipsis diametri cum ordinatis suis constituunt*, sit AB axis major ellipsis; & ducta ex vertice ejus A subtensa quavis AM, sit EF diameter, quæ bisecat in O istam subtensam, eamque velut suam ordinatam agnoscit; jungaturque BM.

Quia igitur AC est ad CB, ut AO ad OM; erit BM ipsi EF parallela: proindeque angulus AMB erit æqualis angulo AOC, quem diameter cum ordinata ad plagam unam constituit. Unde aliæ ellipsis diametri cum ordinatis suis saltem ad partem unam non alios angulos continebunt, quam quos suscipere possunt portiones, in quas dividitur ellipsis ab axe majore.

Nullum vero horum angulorum rectum esse posse, sed quemlibet obtusum existere; jam exinde consequitur, quod circulus, qui describitur super AB, velut diametro, totus cadat extra ellipsim. Eosdem autem majores semper, atque majores fieri, prout ipsorum vertices magis, atque magis ad axem minorem accedunt, tandemque maximos evadere

in

in punctis K, & L; haud difficile erit ostendere.

Si enim, demissa ad axem majorem AB ordinata MN, capiatur CQ æqualis CN, & ad punctum Q ducatur ordinata alia PQ; ob æqualia rectangula ANB, AQB, erunt etiam æqualia quadrata ordinatarum MN, PQ: proindeque segmentum circuli, transiens per tria puncta A, M, B, transibit quoque per punctum P. Unde, sicuti segmentum istud eo minoris fit latitudinis, quo puncta M, & P ad axem minorem magis accedunt; sic & ipsi anguli AMB, APB eo majores evadunt, quo minor est suorum verticum ab axe minore distantia.

XI. Sed, ut ad communes diametrorum proprietates rursus revertamur, illud etiam omnibus accidit, ut *ordinatæ, quæ ad duas quascumque diametros ab alternis earum verticibus ducantur, dividant ipsas diametros in eadem ratione.* XI. *Diametri ab ordinatis, super iis ductis ab alternis earum verticibus, dividuntur in eadem ratione.*

Sint enim AB, EF duæ quævis diametri ellipsis AMB. Et ducatur ex vertice E ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF. Dico, fore, ut BG ad AG, ita FO ad EO. Fig. 29.

Extendatur ordinata una AO usque donec occurrat ellipsi ad partem alteram in M; tumque agatur per punctum O recta OL, ipsi EG parallela, quæ conveniat cum diametro AB in puncto L.

Et quoniam subtensa AM pertinet ad verticem A, eaque dividitur bifariam per rectam EF, transeuntem per centrum C, erit ex

superius ostensis, ut CL ad CG, ita CG ad CA. Unde, quum CL sit ad CG, ut est CO ad CE; erit ex æquali, ut CG ad CA, ita CO ad CE.

Quoniam vero invertendo CA est ad CG, ut CE ad CO; erit, per conversionem rationis, ut CA ad AG, ita CE ad EO; & sumendo antecedentium dupla, erit etiam, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Unde demum dividendo erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO.

XII. *Quomodo definiri potest positio ordinatarum cujusque diametri.*

XII. Hujus autem proprietatis ope, facile erit, *cujuscumque ellipseos diametri positionem suarum ordinatarum definire.*

Fig. 29. Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur intra ellipsim recta quævis PP, quæ non transeat per centrum. Tum, secta ea bifariam in V, jungatur CV, quæ extendatur in E, & F.

Agatur porro ex vertice A recta AM, ipsi PP parallela, quæ diametro EF occurrat in O. Et siquidem AB subinde secetur in G, ut BG sit ad AG, veluti est FO ad EO; erit EG ordinata una ipsius AB.

Si enim EG non sit ordinata ipsius AB, sit ejus ordinata recta EH. Et quoniam ad diametros AB, EF ex alternis earum verticibus ductæ sunt ordinatæ EH, AO; per proprietatem jam ostensam, erit, ut BH ad AH, ita FO ad EO.

Hinc, quum ex constructione FO sit ad EO, ut est BG ad AG; erit ex æquali, ut BG ad AG, ita BH ad AH: & propterea, quum componendo sit, ut AB ad AG, ita AB ad AH; erunt duæ AG, AH æquales inter se.

Quod

Quod fieri non poteſt.

XIII. Omnium quoque diametrorum ellipſis commune eſt, ut *cujuſque conjugata diameter ſit media proportionalis inter ipſam, & parametrum ejus.* XIII. *Quod inter diametrum, & parametrum ſit media proportionalis diameter conjugata.*

Ellipſis enim AMB ſit AB diameter aliqua; ſitque etiam AD ejus parameter, & KL ejuſdem diameter conjugata. Dico, fore, ut AD ad KL, ita KL ad AB. Fig. 27.

Quoniam enim KC eſt ordinata una ipſius AB; erit, ut AD ad AB, ita KC quadratum ad rectangulum ACB, ſive AC quadratum. Sed, ob rectas AB, KL, biſectas in centro C, KC quadratum eſt ad AC quadratum, ut KL quadratum ad AB quadratum. Quare erit ex æquali, ut AD ad AB, ita KL quadratum ad AB quadratum: & propterea tres rectæ AD, KL, AB continue proportionales erunt.

Hinc, ſiquidem KR ſit parameter diametri KL, cum iiſdem AD, KL, AB erit etiam continue proportionalis KR. Nam, ſicuti KL eſt conjugata ipſius AB, ita AB conjugata eſt ipſius KL. Unde, quemadmodum KL media eſt proportionalis inter AD, & AB; ita erit AB media proportionalis inter KL, & KR: proindeque quatuor AD, KL, AB, KR continue proportionales erunt.

XIV. Commune itidem eſt accidens diametrorum omnium, ut *rectæ, ex cujuſque verticibus per punctum aliquod ellipſis ductæ, abſcindant ex qualibet ejus ordinata portiones duas, quæ rectangulum continent, æquale quadrato ipſius ordinatæ.* XIV. *Diametrorum omnium ellipſis alia proprietas communis.*

FIG. 30. Sit enim AB diameter aliqua ellipsis AMB. Et, ductis per punctum quodvis E ipsius ellipsis rectis AX, BZ, conveniant eæ cum aliqua ejus diametri ordinata MN in punctis P, & Q. Dico, rectangulum PNQ æquale esse quadrato ipsius MN.

Ducatur siquidem ex puncto E ad eandem diametrum AB ordinata alia EG; eritque EG quadratum ad rectangulum AGB in ratione composita ex EG ad AG, & ex EG ad BG; sive etiam in ratione composita ex PN ad AN, & ex QN ad BN.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum PNQ ad rectangulum ANB. Quare erit ex æquali, ut EG quadratum ad rectangulum AGB, ita rectangulum PNQ ad rectangulum ANB.

Ob ellipsim autem, EG quadratum est ad rectangulum AGB, ut MN quadratum ad rectangulum ANB. Itaque erit rursus ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita rectangulum PNQ ad idem rectangulum ANB: & propterea MN quadratum æquale erit rectangulo PNQ.

C A P. III.

Hyperbolæ omnes aliæ diametri determinantur.

I. *Quid sit*

I. Quemadmodum in ellipsi, ita etiam in hyperbola omnes aliæ diametri

tri transeunt per punctum illud, quod hyperbolæ *centrum* appellatur. *Centrum hyperbolæ, & cur tali nomine vocetur.*

Est autem hoc punctum *id, quod bifariam dividit diametrum principalem*, sive quæ ex cono deducitur. Ut, si AB sit diameter, quam hyperbola sortitur in ipso cono, eademque secetur bifariam in puncto C; vocabitur punctum istud C centrum ipsius hyperbolæ. FIG. 31.

Sortitum est vero tale nomen istiusmodi punctum, quia *omnis recta per ipsum ducta, & utrinque ad hyperbolas oppositas terminata, bifariam in eo dividitur*. Ducatur enim per punctum C recta quævis EF, quæ hyperbolis oppositis occurrat in punctis E, & F. Dico, rectam istam EF secari bifariam in puncto C.

Demittantur namque ex punctis E, & F ordinatæ ad diametrum EG, FH. Quumque eæ inter se sint parallelæ, æquiangula erunt triangula CEG, CFH: proindeque erit, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita EG quadratum ad FH quadratum. Sed, propter hyperbolam, EG quadratum est ad FH quadratum, ut rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Quare erit ex æquali, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum AHB.

Hinc, subtrahendo terminos secundæ rationis ex terminis primæ, erit etiam, ut CG quadratum ad CH quadratum, ita CA quadratum ad CB quadratum; & consequenter latera horum quadratorum CG, CH, CA, CB pariter proportionalia erunt. Sed, ob eadem triangula æquiangula CEG, CFH, CG est ad CH, ut CE ad CF. Itaque erit ex æquali, ut CA ad

CB,

CB, ita CE ad CF: & propterea, sicuti duæ CA, CB inter se sunt æquales; sic & duæ CE, CF similiter inter se æquales erunt.

II. *Recta, per centrum ducta, quæ uni hyperbolarum oppositarum occurrit, debet etiam cum altera convenire.* Fig. 31.

II. Verum quidem est, illud hic a nobis assumptum esse, ut *recta, per centrum ducta, quæ uni hyperbolarum oppositarum occurrit, debeat quoque cum altera convenire*. Sed facile erit, tum istud ostendere, tum alia etiam ratione probare, quod recta, per centrum ducta, & ad hyperbolas oppositas terminata, bifariam in ipso centro secetur.

Ducatur enim ex centro C ad unam ex hyperbolis oppositis recta CE. Tum, demissa ad diametrum AB ordinata EG, capiatur CH æqualis CG. Erigatur deinde ad partem contrariam ordinata alia HF. Ac denique jungatur recta CF.

Quia igitur æquales sunt inter se, tam duæ CA, CB, quam duæ CG, CH; erunt pariter æquales duæ AG, BH. Unde æqualia itidem erunt inter se, tam rectangula AGB, AHB, quam quadrata ordinatarum EG, FH, quæ rectangulis iis proportionalia sunt.

Hinc, quum duo triangula CGE, CHF habeant duo latera CG, EG æqualia duobus lateribus CH, FH, alterum alteri, & æquales etiam angulos, sub iis lateribus contentos; omnia alia pariter æqualia habebunt.

Duæ igitur CE, CF æquales erunt inter se. Sed eædem, ob æquales angulos ECG, FCH, jacent etiam in directum. Quare recta CE, producta versus centrum, conveniet cum hyperbola opposita in F, totaque EF bifariam secabitur in ipso centro.

III. Ut

III. Ut autem pateat, quod sit diameter hyperbolarum oppositarum recta quælibet, ducta per centrum, & ad eas terminata; *ostendendum est prius sequens theorema*. Nimirum, quod si EF sit aliqua istarum rectarum, eaque bisecet in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A, & demissa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela ducatur OL; sit semper, ut CL ad CG, ita CG ad CA.

III. *Theorema fundamentale pro determinandis hyperbolæ diametris aliis.* FIG. 31.

Nec sane difficile erit theorema istud ostendere. Nam, sicuti AM dupla est ipsius AO; ita, ducta ad diametrum AB ordinata alia MN, erit AN dupla quoque ipsius AL. Unde, quum sit etiam diameter AB dupla ipsius AC; erit tota NB dupla pariter totius LC: & propterea rectangulum ANB erit quadruplum rectanguli ALC.

Et quoniam MN dupla est etiam ipsius OL; erit MN quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex OL. Quare erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita OL quadratum ad rectangulum ALC. Sed, propter hyperbolam, MN quadratum est ad rectangulum ANB, ut EG quadratum ad rectangulum AGB. Itaque erit ex æquali, ut OL quadratum ad rectangulum ALC, ita EG quadratum ad rectangulum AGB; & consequenter permutando erit quoque, ut OL quadratum ad EG quadratum, ita rectangulum ALC ad rectangulum AGB.

Hinc, quum, ob triangula æquiangula COL, CEG, OL quadratum sit ad EG quadratum, ut CL quadratum ad CG quadra-

quæ rectangulis iis proportione correspondent: & propterea, quum duæ MN, PQ inter se sint æquales, & parallelæ; erit etiam MP diametro AB parallela.

Deinde, propter parallelogramma CM, CP, duæ CN, CQ sunt æquales duabus MV, PV. Sed ex constructione duæ CN, CQ inter se sunt æquales. Quare etiam inter se æquales erunt duæ MV, PV: proindeque recta MP, non modo parallela erit diametro AB, sed bifariam quoque secabitur in V a recta KL.

IV. Cujusmodi esse debet recta illa, quæ in hyperbolis vices subit diametri conjugatæ.

IV. Etsi autem recta, quæ ducitur per centrum æquidistanter ordinatis alicujus diametri, bifariam dividat eas omnes, quæ diametro parallelæ, utrinque ad hyperbolas oppositas terminantur; attamen, nisi ei *vertices*, suamque adeo *longitudinem* præscribamus, multum abest, ut *conjugatæ diametri* vices subire possit, quemadmodum contingit in ellipsi.

Præscribendi vero sunt ei *vertices* ea lege, ut *bisecta in ipso centro, media evadat proportionalis inter diametrum, ad quam refertur, & parametrum ejus*. Nam meminisse oportet, in ellipsi conjugatam cujusque diametri esse rectam illam, quæ ducitur per centrum ordinatis ejus æquidistanter, quæque bifariam ibidem secta, media est proportionalis inter ipsam diametrum, & parametrum suam.

Itaque, manentibus omnibus, ut supra, FIG. 39. dicetur recta KL conjugata diameter ipsius AB, siquidem duæ CK, CL sint æquales inter se; tumque etiam tota KL media sit pro-

por-

portionalis inter diametrum AB, & parametrum ejus AD. Qua ratione quadratum cujusvis ordinatæ MN ad rectangulum ei correspondens ANB, non modo erit, ut AD ad AB, verum etiam, ut KL quadratum ad AB quadratum.

V. Præscriptis verticibus conjugatæ diametro, si velut ejus *ordinatas* habere velimus semisses earum rectarum, quæ ad hyperbolas oppositas terminatæ, bifariam ab ipsa secantur; *proprietas ejus alia quidem erit ab ea, quæ competit diametro, ad quam ipsa velut conjugata refertur*.

V. *Quod alia sit proprietas diametri conjugatæ, quam ordinatæ ejus ad unam ex hyperbolis terminantur.*

Nimirum accidens ipsius AB est, ut quadratum cujusque ordinatæ MN sit ad rectangulum ANB, sive etiam ad differentiam quadratorum CN, CA, ut est KL quadratum ad AB quadratum. Sed proprietas conjugatæ KL est, ut quadratum cujuslibet ordinatæ MV sit ad summam quadratorum CV, CK, veluti est AB quadratum ad KL quadratum. FIG. 39.

Id vero ostendetur in hunc modum. Quadratum ex MN est ad rectangulum ANB, ut est KL quadratum ad AB quadratum; sive etiam, ut est CK quadratum ad CA quadratum. Quare invertendo erit, ut rectangulum ANB ad MN, sive CV quadratum, ita CA quadratum ad CK quadratum. Et, addendo terminos secundæ rationis terminis primæ, erit quoque, ut AN, sive MV quadratum ad summam quadratorum CV, CK, ita CA quadratum ad CK quadratum; sive etiam, ita AB quadratum ad KL quadratum.

VI. Id autem mirum esse non debet. Ne-

CP, & ex CP ad CQ. Sed CK est ad CP, ut KL ad PR; sive etiam, ex theoremate ostenso, ut EG ad AO. Et, ducta OS, ipsi EG parallela, CP est ad CQ, ut AO ad OS. Itaque erit CK ad CQ in ratione composita ex EG ad AO, & ex AO ad OS; hoc est in simplici ratione, quam habet EG ad OS, vel etiam CE ad CO.

Sequitur secundo, quod ducta ad conjugatam PR recta KH, ipsi EF parallela, CP sit ad CH, ut est CA ad CG. Nam CP ad CH rationem habet compositam ex CP ad CK, & ex CK ad CH. Sed CP est ad CK, ut PR ad KL; sive etiam, ex theoremate ostenso, ut AO ad EG. Et, ducta GV, ipsi AO parallela, CK est ad CH, ut EG ad GV. Itaque erit CP ad CH in ratione composita ex AO ad EG, & ex EG ad GV; hoc est in simplici ratione, quam habet AO ad GV, vel etiam CA ad CG.

Ex quibus sequitur ulterius, CP esse ad CH, ut est CK ad CQ. Quum enim ordinatæ EG, AO dividant diametros AB, EF in eadem ratione; erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO; & dividendo, ut AB ad AG, ita EF ad EO. Sed, capiendo semisses antecedentium, CA est ad AG, ut CE ad EO. Itaque, addendo antecedentes consequentibus, erit etiam, ut CA ad CG, ita CE ad CO. Jam vero, ex ostensis, CA est ad CG, ut CP ad CH; itemque CE est ad CO, ut CK ad CQ. Quare erit ex æquali, ut CP ad CH, ita CK ad CQ.

IX. Eiusdem IX. Ducatur nunc, tam ad diametrum AB recta EI, ipsi PR parallela, quam ad conjuga-

jugatam ejus KL recta PT, æquidistans ipsi EF. Et sicuti ex eo, quod CA sit ad CG, veluti est CE ad CO, ostendemus, rectangulum AGB æquale esse rectangulo CGI; ita quoque ex eo, quod CK sit ad CQ, ut est CP ad CH, *facili negotio demonstrabimus*, rectangulum KQL esse æquale rectangulo CQT.

theorematis consectarium quartum. FIG. 40.

Quoniam enim eidem PR parallela est, tam recta EI, quam recta AO; erunt duæ EI, AO parallelæ etiam inter se: proindeque erit ut CI ad CA, ita CE ad CO. Sed CE est ad CO, ut CA ad CG. Quare erit ex æquali, ut CI ad CA, ita CA ad CG: & propterea CA quadratum æquale erit rectangulo ICG.

Hinc, addito communi rectangulo AGB, erit etiam CG quadratum æquale duobus rectangulis ICG, AGB. Sed CG quadratum æquale est pariter duobus rectangulis ICG, CGI. Itaque duo ista rectangula ICG, CGI duobus illis ICG, AGB æqualia erunt: & proinde, ablato communi rectangulo ICG, remanebit rectangulum CGI æquale rectangulo AGB.

Eadem autem ratione, quoniam eidem EF parallela est, tam recta PT, quam recta KH; erunt duæ PT, KH parallelæ etiam inter se: proindeque erit, ut CT ad CK, ita CP ad CH. Sed CP est ad CH, ut CK ad CQ. Quare erit ex æquali, ut CT ad CK, ita CK ad CQ: & propterea CK quadratum æquale erit rectangulo TCQ.

Hinc, addito communi rectangulo KQL, erit etiam CQ quadratum æquale duobus rectangulis TCQ, KQL. Sed CQ quadratum

æqua-

æquale est pariter duobus rectangulis TCQ, CQT. Itaque duo ista rectangula TCQ, CQT duobus illis TCQ, KQL æqualia erunt: & proinde, ablato communi rectangulo TCQ, remanebit rectangulum CQT æquale rectangulo KQL.

X. *Confectarium quintum, quæsitam curvarum determinationem exhibens.* FIG. 20.

X. Atque hinc modo, sicuti EG quadratum est ad rectangulum AGB, vel ei æquale rectangulum CGI, ut est KL quadratum ad AB quadratum; ita quoque *nullo negotio ostendemus*, PQ quadratum esse ad rectangulum KQL, vel ei æquale rectangulum CQT, ut est AB quadratum ad KL quadratum.

Nam EG quadratum ad rectangulum CGI rationem habet compositam ex EG ad CG, & ex EG ad IG. Sed, ob triangula æquiangula CGE, PQT, EG est ad CG, ut TQ ad PQ. Itemque, ob triangula æquiangula EGI, CQP, EG est ad IG, ut CQ ad PQ. Quare EG quadratum ad rectangulum CGI erit in ratione composita ex TQ ad PQ, & ex CQ ad PQ.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum CQT ad PQ quadratum. Itaque erit ex æquali, ut EG quadratum ad rectangulum CGI, ita rectangulum CQT ad PQ quadratum. Sed EG quadratum est ad rectangulum CGI, sive AGB, ut KL quadratum ad AB quadratum. Quare erit rursus ex æquali, ut rectangulum CQT ad PQ quadratum, ita KL quadratum ad AB quadratum; adeoque invertendo PQ quadratum erit ad rectangulum CQT, ut AB quadratum ad KL quadratum.

Ex

Ex eo autem, quod PQ quadratum sit ad rectangulum CQT, sive KQL, ut est AB quadratum ad KL quadratum; liquet, punctum P locari in hyperbola, cujus KL est diameter primaria, & AB ejus conjugata. Sed in ejusdem opposita locabitur quoque punctum R; quandoquidem, ducta RZ, eidem AB parallela, ostendemus eadem ratione, RZ quadratum esse ad rectangulum KZL, ut est AB quadratum ad KL quadratum.

XI. Quod quum ita sit, manifestum est, *per extremitates earum rectarum, quæ sunt conjugatæ diametrorum in hyperbolis oppositis, non alias curvas transire, quam binas alias oppositas hyperbolas*. Atque hinc est, ut aliæ istæ binæ hyperbolæ priorum *conjugatæ* dicantur; quia scilicet diametri priorum hyperbolarum non alias rectas, velut suas conjugatas, agnoscunt, quam quæ ductæ per centrum, ad alias istas hyperbolas terminantur. *XI. Conjugatarum hyperbolarum natura, & affectiones ostenduntur.*

Jam in aliis hisce binis hyperbolis, quæ priorum conjugatæ dicuntur, KL est diameter primaria, & AB ejus conjugata. Unde eadem ratione hyperbolæ, quæ ipsarum conjugatæ dicendæ sunt, necesse est, ut habeat AB velut diametrum primariam, & KL velut ejus conjugatam: & ea propter non aliæ erunt, quam ipsæ priores hyperbolæ. Ex quo patet, quod *sicuti priorum hyperbolarum conjugatæ diametri ad alias istas terminantur, sic per contrarium conjugatæ diametri istarum in iis suos terminos debeant habere*. FIG. 40.

Quin etiam, si descriptis aliis hisce duabus hyperbolis, fuerit cujusvis alterius diame-

tri

tri EF priorum hyperbolarum PR conjugata diameter; erit per contrarium EF diameter conjugata ipsius PR in aliis istis hyperbolis. Jam enim per id, quod modo ostensum est, ad priores hyperbolas terminari debet istiusmodi conjugata diameter. Itaque, si ostendi possit, ipsi EF parallelas esse ordinatas diametri PR; proculdubio erit EF diameter ejus conjugata.

Id vero demonstrabimus in hunc modum. Quoniam, ex superius ostensis, CK est ad CQ, ut CP ad CH; subducendo antecedentes ex consequentibus, erit quoque, ut CK ad KQ, ita CP ad PH. Sed, sumptis antecedentium duplis, KL est ad KQ, ut PR ad PH. Quare componendo erit pariter, ut LQ ad KQ, ita RH ad PH: & propterea, quemadmodum PQ est ordinata diametri KL; ita & KH, quæ est ipsi EF parallela, ordinata erit diametri PR.

Patet igitur, quod sicuti duæ hyperbolæ nequeunt esse conjugatæ duarum aliarum hyperbolarum, nisi & istæ etiam sint illarum conjugatæ; sic in quatuor hisce hyperbolis nequeat diameter una conjugata esse alterius diametri, nisi & ista pariter sit conjugata illius. Hinc, quum duæ hujusmodi diametri sub contemplationem venient, non modo alteram alterius *conjugatam*, sed ambas simul *conjugatas* diametros appellabimus.

XII. *Quod theorema, paulo superius ostensum in hyperbola, obtineat*

XII. Cæterum, priusquam huic capiti finem imponamus, notetur velim, *theorema illud, superius ostensum in hyperbola, de ordinatis, quæ ducuntur ad binas diametros ex alternis earum verticibus, obtinere etiam in ellipsi.*

Elli-

Ellipsis enim ALB sint AB, EF duæ quævis diametri, ad quas ex alternis earum verticibus ducantur ordinatæ EG, AO; sintque etiam KL, PR earum diametrorum conjugatæ. Dico, ordinatas EG, AO habere inter se eandem rationem, quā habent conjugatæ KL, PR. *etiam in ellipsi.* Fig. 41.

Quoniam enim ordinatæ EG, AO dividunt diametros AB, EF in eadem ratione; erit, ut BG ad AG, ita FO ad EO: proindeque componendo AB erit ad AG, ut est EF ad EO. Sed permutando AB est ad EF, tam ut AG ad EO, quam ut BG ad FO. Quare, compositis rationibus, erit quoque, ut AB quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum EOF; & rursus permutando erit, ut AB quadratum ad rectangulum AGB, ita EF quadratum ad rectangulum EOF.

Quia autem, propter ellipsim, KL quadratum est ad AB quadratum, ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit etiam permutando, ut KL quadratum ad EG quadratum, ita AB quadratum ad rectangulum AGB. Et similiter, quia ratione ejusdem ellipsis, PR quadratum est ad EF quadratum, ut AO quadratum ad rectangulum EOF; erit adhuc permutando, ut PR quadratum ad AO quadratum, ita EF quadratum ad rectangulum EOF.

Hinc, quum ex æquali KL quadratum sit ad EG quadratum, ut est PR quadratum ad AO quadratum; latera horum quadratorum KL, EG, PR, AO erunt pariter proportionalia. Erit igitur, ut KL ad EG, ita PR ad AO: & propterea permutando ordinatæ duæ

EG, AO erunt inter se in eadem omnino ratione, quam habent conjugatæ diametrorum KL, PR.

CAP. VI.

Parabolæ omnes aliæ diametri determinantur.

I. *Theorema fundamentale pro determinandis parabolæ diametris aliis.*

I. ETsi parabola, perinde ac ellipsis, & hyperbola, præter eam diametrum, quam in ipso cono sortitur, infinitas alias diametros habeat; in ea tamen omnes aliæ istæ diametri, non convergunt ad punctum ullum, ut contingit in hyperbola, & in ellipsi; sed sunt omnes tam inter se, quam cum ipsa diametro principali parallelæ.

Ut autem pateat, quod sit diameter parabolæ recta quælibet, ducta æquidistanter diametro principali; *ostendendum est prius sequens theorema*. Nimirum, quod si AB sit parabolæ diameter principalis, & aliqua ejus parallela EF bisecet in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A; quod, inquam, demissa ad diametrum ordinata EG, & ducta per punctum O recta OL, ei parallela, sit semper AG æqualis ipsi GL. (Fig. 42.)

Nec sane difficile erit, theorema istud ostendere. Nam, sicuti AM dupla est ipsius AO; ita, demissa ad diametrum ordinata alia MN, erit quoque, tum AN dupla ipsius AL, cum MN dupla ipsius OL, sive EG: proin-

proindeque MN quadratum erit quadruplum quadrati, quod fit ex EG. Sed, ob parabolam, MN quadratum est ad EG quadratum, ut AN ad AG. Quare etiam AN quadrupla erit ipsius AG: & propterea, quum sit AL dupla ejusdem AG; duæ AG, GL æquales erunt inter se.

II. Inde vero *sequitur primo*, quod si ex punctis A, & E ducantur rectæ AK, EI, ipsis EG, AM parallelæ, quarum prior AK conveniat cum EF in puncto K, & altera EI cum AB in puncto I; triangulum EGI sit æquale parallelogrammo AGEK. *II. Praecedentis theorematis consectarium primum.* FIG. 42.

Est enim, ex theoremate ostenso, AG æqualis GL. Sed GL est æqualis ipsi EO, seu AI. Quare duæ AG, AI etiam inter se æquales erunt: proindeque tota GI dupla erit ipsius AG.

Jam triangulum EGI, & parallelogrammum AGEK sunt in iisdem parallelis. Quare, quum basis trianguli GI dupla sit basis parallelogrammi AG; erit triangulum EGI æquale parallelogrammo AGEK.

Et hinc patet, æqualia esse etiam triangula XAI, XEK; quandoquidem, si ex triangulo EGI, & ex parallelogrammo AGEK auferatur commune trapetium AGEX, nonnisi duo illa triangula remanebunt.

III. Iisdem positis, *sequitur secundo*, quod triangulum AOK sit æquale parallelogrammo EOAI. *III. Consectarium secundum.*

Est enim, ex theoremate ostenso, AG æqualis GL. Sed AG est æqualis ipsi EK, & GL est æqualis ipsi EO. Itaque duæ EK, EO FIG. 42.

etiam inter se æquales erunt: proindeque tota KO dupla erit ipsius EO.

Jam triangulum AOK, & parallelogrammum EOAI sunt in iisdem parallelis. Quare, quum basis trianguli KO dupla sit basis parallelogrammi EO; erit triangulum AOK æquale parallelogrammo EOAI.

Potest etiam id erui ex æqualitate triangulorum XAI, XEK, superius ostensa. Nam, si eis addatur commune trapetium AOEX, fiet parallelogrammum EOAI æquale triangulo AOK.

IV. *Consectarium tertium.* FIG. 42. 43. IV. Capiatur porro in parabola punctum quodvis aliud P, ex quo ducantur ad diametrum AB duæ aliæ rectæ PS, PQ, ipsis EI, EG parallelæ. Et *facile erit ostendere*, quod triangulum PQS sit etiam æquale correspondenti parallelogrammo AQRK.

Quum enim, ex constructione, parallelæ sint inter se, tam duæ EG, PQ, quam duæ EI, PS; triangula duo EGI, PQS similia erunt: proindeque erit, ut EG quadratum ad PQ quadratum, ita triangulum EGI ad triangulum PQS. Sed, propter parabolam, EG quadratum est ad PQ quadratum, ut AG ad AQ. Itaque erit ex æquali, ut AG ad AQ, ita triangulum EGI ad triangulum PQS.

Jam parallelogramma duo AGEK, AQRK habent eandem altitudinem. Unde, quum sint inter se in eadem ratione rectarum AG, AQ; erit rursus ex æquali, ut triangulum EGI ad triangulum PQS, ita parallelogrammum AGEK ad parallelogrammum AQRK: & propterea, quemadmodum triangulum EGI osten-

sum

sum est æquale parallelogrammo AGEK; ita quoque erit triangulum PQS æquale parallelogrammo AQRK.

V. Denique, si recta PS, ipsi EI parallela, conveniat cum recta EF in puncto V, *nullo negotio ostendemus quoque*, quod triangulum PVR sit æquale correspondenti parallelogrammo EVSI. V. *Consectarium quartum.*

Ponamus etenim primo, quod punctum S sit supra verticem A, & quod punctum P existat inter A, & E. Quia igitur triangulum EGI ostensum est æquale parallelogrammo AGEK, & triangulum PQS æquale parallelogrammo AQRK; si ex triangulo auferatur triangulum, ex parallelogrammo parallelogrammum, ex utroque autem commune trapetium PQGZ; supererit trapetium EZSI æquale trapetio PZER: proindeque, addito communi triangulo EZV, fiet parallelogrammo EVSI æquale triangulum PVR. Fig. 41.

Ponamus secundo, quod punctum S sit quidem supra verticem A, sed quod punctum P sit ad alteram partem puncti E relate ad eundem verticem A. Et rursus, quia triangulum EGI ostensum est æquale parallelogrammo AGEK: addito communi trapetio EGQR, fiet trapetium EIQR æquale parallelogrammo AQRK, sive etiam triangulo PQS: & proinde, dempto communi trapetio VSQR, fiet parallelogrammo EVSI rursus æquale triangulum PVR. Fig. 42.

Ponamus denique, quod punctum S sit infra verticem A. Et quoniam triangulum PQS ostensum est æquale parallelogrammo Fig. 43.

 AQRK:

AQRK: addito, vel dempto communi trapetio VSQR, fiet triangulum PVR æquale trapetio ASVK. Sed, propter æqualitatem triangulorum XEK, XAI, superius ostensam, trapetium ASVK est æquale parallelogrammo EVSI. Quare etiam triangulum PVR æquale erit parallelogrammo EVSI.

VI. *Omnis recta, ducta æquidistanter diametro principali, est etiam parabolæ diameter.*

VI. His præmissis, facile modo erit, ostendere, quod *sit diameter quoque parabolæ recta qualibet, ducta æquidistanter diametro principali*. Ut enim talis esse possit, duo quidem requiruntur. Primum, ut bisecet rectas omnes, alicui æquidistanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas. Deinde, ut quadrata ex semissibus istarum rectarum sint, ut ipsius portiones correspondentes.

Jam horum utrumque facili negotio demonstrabitur. Quantum enim ad primum, sit EF recta quævis, ducta æquidistanter diametro principali AB; eaque bisecet in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A ejusdem diametri. Dico, eandem EF secare quoque bifariam in V quamvis aliam rectam PP, quæ ipsi AM parallela, utrinque ad parabolam terminatur.

FIG. 42. 43.

Positis enim omnibus, ut supra; erit utrumque triangulorum PVR, PVR æquale parallelogrammo EVSI. Quare æqualia erunt inter se ipsa duo triangula PVR, PVR. Sed eadem triangula, velut similia, sunt, ut quadrata laterum homologorum PV, PV. Itaque latera isthæc homologa PV, PV erunt pariter æqualia; & consequenter tota PP bifariam secta erit in V.

VII. Quan-

VII. Quantum vero ad secundum, *nec etiam magno labore opus est, ad illud ostendendum*. Maneant enim omnia adhuc, ut supra. Et dico insuper, quadrata ipsarum AO, PV esse inter se, quemadmodum sunt portiones correspondentes EO, EV.

VII. *Pars altera demonstrationis, qua praecedens veritas evincitur.* Fig. 42. 43.

Quum enim triangulum AOK ostensum sit aequale parallelogrammo EOAI, & triangulum PVR aequale parallelogrammo EVSI; erit, ut triangulum AOK ad triangulum PVR, ita parallelogrammum EOAI ad parallelogrammum EVSI.

Jam vero, ob similitudinem triangulorum AOK, PVR, triangulum AOK est ad triangulum PVR, ut AO quadratum ad PV quadratum. Itemque, ob communem altitudinem parallelogrammorum EOAI, EVSI, parallelogrammum EORI est ad parallelogrammum EVSI, ut EO ad EV. Quare erit ex aequali, ut AO quadratum ad PV quadratum, ita EO ad EV.

VIII. Non inficior, illud hic a nobis assumptum esse, ut *recta, quae intra parabolam subtensa ducitur aequidistanter, utrinque ad ipsam parabolam terminetur*. Sed facile erit, tum istud ostendere, tum alia etiam ratione probare, quod rectae omnes, ipsi AM aequidistantes, & utrinque ad parabolam terminatae, bifariam secentur à recta EF.

VIII. *Recta intra parabolam, subtensa ducta aequidistanter, utrinque ad eam terminatur.* Fig. 43.

Jam enim de rectis, quae ducuntur intra segmentum parabolicum AEM, res est, extra omnem dubitationis aleam posita. Itaque ducatur extra illud segmentum recta quaevis PV, ipsi AM parallela. Et, si fieri potest, oc-

currat parabolæ, tantum ex una parte in P. Extendatur ea ad partem aliam versus V, & fiat VP æqualis ipsi PV. Ostendendum est, hoc aliud punctum P esse etiam in parabola.

Ponantur omnia, ut supra. Et quoniam duæ PV, VP inter se sunt æquales; erit triangulum PVR, ad unam partem existens, æquale triangulo PVR, quod existit ad partem alteram. Sed illud, propter parabolam, est æquale parallelogrammo EVSI, sive etiam trapetio ASVK. Quare eidem trapetio ASVK hoc etiam æquale erit: & propterea utrumque triangulorum PQS erit æquale correspondenti parallelogrammo AQRK; eritque adeo, ut triangulum PQS ad triangulum PQS, ita parallelogrammum AQRK ad parallelogrammum AQRK.

Jam, ob similitudinem triangulorum PQS, PQS, triangulum PQS est ad triangulum PQS, ut PQ quadratum ad PQ quadratum; itemque, ob eandem altitudinem parallelogrammorum AQRK, AQRK, parallelogrammum AQRK est ad parallelogrammum AQRK, ut est AQ ad AQ. Quare erit ex æquali, ut PQ quadratum ad PQ quadratum, ita AQ ad AQ: & propterea, sicuti punctum unum P est in parabola, sic etiam locabitur in parabola punctum aliud P.

IX. *Quod ea tantum rectæ sunt parabolæ diametri, quæ parallelæ sunt diametro principali.*

IX. Non ergo dubitari potest, quin recta EF, ducta æquidistanter diametro principali AB, sit etiam diameter parabolæ. Nam, & bifariam dividit rectas omnes, quæ subtensæ AM æquidistantes, utrinque ad parabolam terminantur. Et quadrata ex semissibus istarum recta-

rum

rum servant inter se eandem rationem, quam habent correspondentes portiones ipsius EF.

Sed facile erit etiam ostendere, quod *præter eas, quæ ducuntur æquidistanter diametro principali, nulla alia recta linea possit esse diameter parabolæ*. Ut enim recta aliqua esse queat parabolæ diameter, illud primo requiritur, ut bifariam secet rectas omnes, alicui æquidistanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas. Unde, si ostendi possit, accidens istud iis tantummodo rectis competere, quæ ducuntur æquidistanter diametro principali; jam veritas ejus, de quo agitur, liquido constabit.

Id vero ostendetur in hunc modum. Sit TY recta positione data, cui debent esse parallelæ eæ omnes, quæ bifariam à diametro dividuntur. Jamque, si ea parallela est ordinatis diametri principalis AB; secabit diameter ista AB bifariam rectas omnes, quæ ipsi TY æquidistantes, utrinque ad parabolam terminantur. FIG. 42. 43.

Quod si autem recta TY non sit parallela ordinatis diametri principalis AB; per ea, quæ superius ostensa sunt, semper ex vertice A duci poterit recta alia AM, quæ illi parallela, parabolam secet in alio puncto. At rectas omnes, ipsi AM æquidistanter ductas, & utrinque ad parabolam terminatas, ut modo vidimus, non alia bisecat recta, quam quæ parallela est diametro principali AB, & bifariam dividit subtensam ipsam AM.

X. Theorema initio hujus capitis osten-

X. Cæterum *theorema, hoc capite a nobis ostensum, pro determinandis aliis parabolæ diametris, colligi etiam potest ex eo, quod superius* de-

sum correspondet ei, quod pro ellipsi; & hyperbola superius attulimus.

demonstravimus, tum in ellipsi, cum in hyperbola, pro definiendis harum curvarum diametris aliis.

Fig. 23. 31.

Tam enim in ellipsi, quam in hyperbola, posito, quod AB sit diameter principalis, & centrum punctum C, si EF sit recta quævis per centrum ducta, quæ bisecet in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A; & demissa ad diametrum AB ordinata EG, huic per punctum O parallela agatur OL; erit, ex superius ostensis, ut CL ad CG, ita CG ad CA; atque adeo subducendo, vel antecedentes ex consequentibus, vel consequentes ex antecedentibus, erit etiam, ut CL ad GL, ita CG ad AG.

Jam, abeunte in infinitum puncto B, altero diametri vertice, tam ellipsis, quam hyperbola vertitur in parabolam. Et, quia in infinitum etiam abit centrum C, quod bisecat diametrum AB: quemadmodum duæ AC, EC parallelæ fiunt inter se; sic utraque ipsarum CG, CL infinita evadet. Unde, quum earum differentia GL sit finita; eædem erunt æquales inter se: & propterea, quum sit, ut CL ad GL, ita CG ad AG; etiam AG ipsi GL æqualis erit.

XI. *Correspondent etiam utriusque consectaria; & quid ab infinita centri distantia amplius consequitur.*

XI. Quin, & *consectaria ejusdem theorematis correspondent quoque iis, quæ in ellipsi, & hyperbola ex eodem illo theoremate deduximus.* Nam, ubi centrum C in infinitum abire supponitur, quemadmodum parallelæ fiunt duæ AC, EC; sic omnia illa trapetia, quibus æqualia demonstravimus correspondentia triangula, in parallelogramma totidem vertuntur,

Fig. 23. 31.

At

Atque hinc etiam vera ratio elucescit, *cur in parabola diametri omnes inter se sint parallelæ*. Nimirum, quia in ea centrum est in infinita distantia a vertice principalis diametri; adeoque ejus diametri convergunt ad punctum, infinite distans ab eodem vertice.

Sed ex eo, quod centrum in parabola sit in infinita distantia a vertice diametri principalis, liquet quoque, *in eadem curva non posse locum habere conjugatarum diametrorum contemplationem*; quippe quæ suas positiones habent similiter in infinita ab eodem vertice distantia.

In posterum ergo considerabimus parabolam, non modo, ut ellipsim, & hyperbolam, cujus diameter est infinitæ longitudinis; verum etiam, *ut ellipsim, & hyperbolam, cujus centrum est in infinita distantia a vertice diametri*. Nam, utraque consideratione parabolæ proprietates ex iis, quæ ellipsi, & hyperbolæ competunt, deducuntur.

C A P. VII.

Diametrorum parabolæ communia quædam ostenduntur.

I. EX iis, quæ ostensa sunt in capite præcedenti, abunde liquet, parabolam, præter eam diametrum, quam in ipso cono sortitur, alias etiam innumeras habere, quæ omnes parallelæ sunt, tam inter se, quam cum

I. *Proprietates diametri principalis ad omnes alias diametros pa-*

rabola traducuntur. cum ipsa diametro principali. Sed *communia harum diametrorum* operæ pretium est, ut
FIG. 44. paulo distinctius prosequamur. Quem in finem parabolæ AM sit AB diameter principalis, & EF alia quævis diameter.

Primo igitur, quemadmodum diameter principalis AB suas habet ordinatas; ita suis quoque refertur ordinatis diameter alia EF. Sunt autem, ex ostensis, ordinatæ istæ rectæ illæ omnes, quæ ducuntur æquidistanter subtensæ AM, quam ab ipsa EF suppono bisectam in puncto O.

Deinde, quemadmodum quadrata ordinatarum diametri principalis AB sunt inter se, ut portiones ejus correspondentes, a vertice sumptæ; ita & quadrata ordinatarum alterius diametri EF proportionalia sunt correspondentibus ejus portionibus, similiter a vertice sumptis.

Unde porro, si per verticem E ducatur recta EH ordinatis æquidistanter, quæ sit talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ AO sit æquale rectangulo HEO; vocari poterit recta ista EH *parameter* diametri EF, & erit quadratum cujusvis alterius ordinatæ PV similiter æquale rectangulo HEV.

II. *Communes quoque sunt proprietates, quas ex parabola descriptione deduximus.*

II. Hæc quum ita sint, perspicuum est, *omnes illas proprietates, quæ parabolæ competunt relate ad diametrum principalem, obtinere etiam, quum ad aliam quamvis diametrum parabola ipsa refertur.*

FIG. 44. Hinc ulterius, sicuti describitur parabola in plano, per solas rectarum longitudines, data diametro principali AB cum magnitudine,

ne, & positione parametri AD, quæ ad ipsam refertur; sic etiam describi poterit eadem parabola, ubi una cum alia quavis diametro EF magnitudine, & positione datur illius parameter EH.

Et sicuti recta AD, ducta per verticem A ipsius diametri principalis AB æquidistanter suis ordinatis, contingit parabolam in solo puncto A; ita etiam recta EH, ducta per verticem E alterius cujuslibet diametri EF, similiter ordinatis suis æquidistanter, dumtaxat in puncto E tanget parabolam.

Quin imo, sicuti omnis alia recta, quæ ducta ex eodem vertice A, angulum constituit cum AD, non solum in A, sed in alio quoque puncto secat parabolam; sic pariter quælibet alia recta, quæ ducta ex eodem vertice E, angulum continet cum EH, non modo in E, verum etiam in puncto alio occurret eidem parabolæ.

Unde etiam, si in plano ipsius parabolæ detur positione recta aliqua, quæ non sit parallela ordinatis cujuslibet alterius diametri EF, semper ex vertice E duci poterit recta alia, quæ ei parallela, parabolam secet in alio puncto; quum non aliter esse queat illi parallela, nisi angulum contineat cum EH.

III. Sed his ita se habentibus, liquet quoque, quod *sicuti ex diametro principali transire licuit ad alias diametros; sic vicissim ex quolibet alia diametro, tam ad ipsam principalem, cum ad alias omnes progredi licebit.* III. *Quod ex qualibet parabolæ diametro transire possit in omnes alias.*

Nam semper ac eadem sunt diametrorum omnium proprietates, theorema illud fundamen- Fig. 44.

mentale, quod præcedenti capite ostensum est relate ad diametrum principalem, poterit eadem omnino ratione demonstrari de quavis alia diametro EF.

Itaque, si ducatur recta aliqua AB, diametro EF æquidistanter, quæ bisecet in G subtensam PE, pertinentem ad verticem E; & demissa ad diametrum EF ordinata PV, huic per punctum G parallela agatur GR; duæ ER, VR æquales erunt inter se.

Unde, quum omnes illæ æqualitates triangulorum, parallelogrammorumque, quas superiori capite prosecuti sumus relate ad diametrum principalem, obtineant quoque respectu ipsius diametri EF; facile erit ostendere, rectam illam AB esse diametrum quoque ipsius parabolæ.

Inde enim conficitur, ipsam AB secare bifariam rectas omnes, æquidistanter ductas subtensæ PE, & utrinque terminatas ad parabolam; itemque quadrata ex semissibus istarum rectarum proportionalia esse correspondentibus portionibus ipsius AB, sumptis a termino A.

IV. *Alia diametrorum proprietas communis, respiciens rectas, quas bisecat.*

IV. Habent igitur omnes aliæ parabolæ diametri easdem omnino proprietates cum diametro principali; & ex qualibet earum, tum ad ipsam principalem, cum ad alias omnes progredi licet. Sed parabolæ diametri, *præter hactenus recensitas proprietates, plures alias communes habent*, quas non abs re erit hic breviter ostensas exhibere.

Ac principio quidem illud nobis est ostendendum, quod *qualibet diameter para-*

bolæ non alias rectas, utrinque ad curvam terminatas, dividat bifariam, quam quæ ordinatim ad ipsam diametrum applicantur.

Sit enim AB parabolæ AM diameter quævis, sitque etiam AD recta illa, cui omnes ejus diametri ordinatæ sunt parallelæ. Ducatur in parabola recta PP, quæ utrinque ad curvam terminata, non sit ordinatim applicata diametro AB. Dico, eam ab ipsa diametro AB non posse secari bifariam. Fig. 43

Si enim fieri potest, secetur recta PP a diametro AB bifariam in S. Et quoniam ea non est parallela ordinatis ipsius AB; ex superius ostensis, duci poterit per verticem A recta alia, quæ ipsi PP parallela, parabolam secet in alio puncto. Ducatur itaque recta ista, & sit AM. Tum, bisecta ea in puncto O, ducatur per punctum istud recta EF, ipsi AB parallela.

Quia igitur recta EF ducta est æquidistanter diametro AB, & bisecat in O subtensam AM, pertinentem ad verticem A; per superius ostensa, secabit quoque bifariam in V rectam PP, ipsi AM parallelam. Sed ex hypothesi recta PP secatur bifariam in S. Quare eadem PP bisecta erit, tam in puncto S, quam in puncto V. Quod fieri non potest.

V. *Quomodo data parabola diameter aliqua potest reperiri.*

V. Ex eo autem, quod quælibet diameter parabolæ eas tantum rectas, utrinque ad curvam terminatas, bifariam dividat, quæ ordinatim ad ipsam diametrum applicantur; sequitur per contrarium, ut *si aliqua parabolæ diameter bisecet rectam aliquam, utrinque terminatam ad parabolam; hæc esse debent diametri illius ordinata.*

Un-

Unde ulterius consequitur, ut *si recta aliqua bisecet alias duas aequidistantes, & utrinque ad parabolam terminatas, ea esse debeat diameter ipsius parabolae, atque adeo cuicumque alteri diametro parallela*. Nam aliter, ducta per punctum bisectionis unius ex rectis aequidistantibus recta alia, cuivis diametro parabolae parallela; haec velut diameter bisecabit quoque rectam aliam aequidistantem. Quod fieri non potest.

Id vero quum ita sit, facile erit, *cujuslibet datae parabolae diametrum aliquam reperire, & consequenter positionem determinare omnium aliarum diametrorum*. Neque enim aliud fieri debet, quam ducere intra datam parabolam rectas duas aequidistantes, & utrinque ad curvam terminatas. Nam, sicuti recta, quae eas bifariam dividit, diameter erit parabolae; ita & eadem positionem omnium aliarum diametrorum exhibebit.

VI. *Quod in omni parabola reperire liceat diametrum, quae rectos angulos constituat cum suis ordinatis.*

Fig. 45.

VI. Speciatim in omni parabola reperire licet *diametrum, quae cum suis ordinatis rectos angulos constituat*. Inveniatur siquidem ipsius datae parabolae diameter quaevis EF, sitque EH recta illa, cui omnes istius diametri ordinatae debent esse parallelae. Jamque, si angulus FEH fuerit rectus, erit ipsa EF diameter optata. Quod si secus contigerit, inveniemus diametrum, quam quaerimus, sequenti ratione.

Super diametro EF ex vertice ejus E perpendicularis erigatur EP. Et quoniam ea angulum continet cum EH, cui parallelae sunt ipsius EF ordinatae; per superius ostensa, necessario secabit parabolam in puncto alio P.

Secetur ergo PE bifariam in G, & ducta per punctum istud recta AB, ipsi EF parallela; erit AB diameter, quam quærimus.

Quod enim AB sit diameter parabolæ; id liquet ex eo, quod parallela sit ipsi EF, quæ ex constructione est parabolæ diameter. Quod autem cum suis ordinatis rectos angulos constituat; patet etiam abunde. Nam ordinatæ ejus parallelæ sunt rectæ PE, quam ipsa dividit bifariam: & propterea, sicuti rectus est angulus PEF; sic etiam, propter parallelas AB, EF, rectus erit angulus PGB.

VII. In qualibet igitur parabola existit diameter, quæ rectos cum suis ordinatis angulos constituit. Diametrum istam vocabimus in posterum *axem* ipsius parabolæ. Et facile erit ostendere, quod *in omni parabola nonnisi unicus axis reperiatur*. VII. *De axe parabolæ, & quod is nonnisi unicus esse possit.*

Si enim fieri potest, parabola AM, præter axem AB, habeat quoque axem alium, qui sit EF. Et quoniam duo isti axes, velut parabolæ diametri, inter se sunt paralleli; illæ eædem rectæ, quæ uni axi perpendiculares sunt, erunt etiam normales ad axem alterum. Fig. 45.

Id vero fieri non potest. Quum enim uterque axis cum ordinatis suis rectos angulos constituat; eædem erunt utriusque axis ordinatæ. Quare illa eadem recta, quæ utrinque ad parabolam terminata, dividitur bifariam ab axe uno, bisecabitur quoque ab axe altero. Quod plane repugnat.

VIII. Jam, ut *aliqua dicamus de angulis, quos aliæ parabolæ diametri cum ordinatis suis constituunt*, sit AB axis ipsius parabolæ. Et du- VIII. *De angulis, quos aliæ parabolæ dia-*

metri cum ordinatis suis constituunt.

FIG. 45.

ducta ex vertice ejus A subtensa quavis AM sit EF diameter, quæ bisecat in O subtensam istam, eamque velut suam ordinatam agnoscit.

Quia igitur AB, EF, velut parabolæ diametri, inter se sunt parallelæ; erit angulus BAM æqualis angulo AOE, quem diameter cum ordinata ad plagam unam constituit. Unde aliæ parabolæ diametri cum ordinatis suis, saltem ad partem unam, non alios angulos continebunt, quam quos subtensæ, pertinentes ad verticem axis, cum ipso axe constituunt.

Nullum vero horum angulorum rectum esse posse, sed quemlibet acutum existere; jam exinde consequitur, quod perpendicularis, erecta super axe ex vertice ejus, velut parallela ordinatis ipsius axis, tota extra parabolam cadat. Eosdem autem minores semper, ac minores fieri, prout longitudo earum subtensarum major semper, atque major evadit; notius est, quam ut ulla egeat demonstratione.

IX.

Ordinatæ, super diametris ducta ab alternis earum verticibus, æquales ex iis portiones abscindunt.

IX. Sed, ut ad communes diametrorum proprietates rursus revertamur, illud etiam omnibus accidit, ut *ordinatæ, quæ ad duas quascumque diametros ab alternis earum verticibus ducuntur, æquales ex ipsis diametris portiones abscindant.*

FIG. 46.

Sint enim AB, EF duæ quævis diametri parabolæ AM. Et ducatur ex vertice E ordinata EG ad diametrum AB, & ex vertice A ordinata AO ad diametrum EF. Dico, portionem AG æqualem esse portioni EO.

Extendatur ordinata una AO usque donec occurrat parabolæ ad partem alteram in M; tumque agatur per punctum O recta OL,

ipsi

ipsi EG parallela, quæ conveniat cum diametro AB in puncto L.

Et quoniam subtensa AM pertinet ad verticem A, eaque dividitur bifariam per rectam EF, ductam æquidistanter diametro AB; duæ AG, GL, ex superius ostensis, æquales erunt inter se. Sed, ob parallelogrammum EL, æquales quoque sunt duæ GL, EO. Quare etiam AG ipsi EO æqualis erit.

X. Hujus autem proprietatis ope, facile erit, *cujuscumque parabolæ diametri positionem suarum ordinatarum definire.* X. *Quomodo definiri potest positio ordinatarum cujusque diametri.*

Sit enim AB diameter, cujus ordinatæ quæruntur. Ducatur intra parabolam recta quævis PP, quæ utrinque ad ipsam terminetur. Tum, secta ea bifariam in V, agatur per punctum istud V recta EF, diametro AB parallela. FIG. 46.

Ducatur porro ex vertice A recta AM, ipsi PP æquidistanter, quæ diametro EF occurrat in O. Et, siquidem ex AB abscindatur portio AG, æqualis portioni EO, jungaturque EG; erit EG ordinata ipsius AB.

Si enim EG non sit ordinata ipsius AB, sit ejus ordinata recta EH. Et quoniam ad diametros AB, EF ex alternis earum verticibus ductæ sunt ordinatæ EH, AO; per proprietatem jam ostensam, portiones duæ AH, EO æquales erunt inter se. Sed ex constructione eidem EO æqualis est portio AG. Quare erunt pariter æquales inter se duæ AG, AH. Quod fieri non potest.

XI. Omnium quoque diametrorum parabolæ commune est, ut *si per aliquod parabolæ* XI. *Diametro.*

cum parabola alia proprietas communis. *punctum recta duæ ducantur, quarum una pertineat ad verticem alicujus diametri, altera sit ei parallela, eæ abscindent ex qualibet diametri ordinata portiones duas, quæ rectangulum continent, æquale quadrato ipsius ordinatæ.*

FIG. 47.

Sit enim AB diameter aliqua parabolæ AM. Et, ductis per punctum quodvis E ipsius parabolæ rectis AX, FZ, quarum prior AX pertineat ad verticem A, altera sit ipsi diametro parallela, conveniant eæ cum aliqua ejusdem diametri ordinata MN in punctis P, & Q. Dico, rectangulum PNQ æquale esse quadrato ipsius MN.

Ducatur siquidem ex puncto E ad eandem diametrum AB ordinata alia EG; eritque, propter parabolam, ut EG, sive QN quadratum ad MN quadratum, ita AG ad AN. Sed AG est ad AN, ut EG, sive QN ad PN. Itaque erit ex æquali, ut QN quadratum ad MN quadratum, ita QN ad PN: & propterea, quum tres rectæ QN, MN, PN sint continue proportionales; erit MN quadratum æquale rectangulo PNQ.

Patet autem, hujusmodi communem diametrorum omnium parabolæ proprietatem correspondere ei, quam postremo loco, tum in ellipsi, cum in hyperbola superius demonstravimus. Nam, ubi punctum B, alter diametri vertex, in infinitum abire supponitur; quemadmodum, tam ellipsis, quam hyperbola vertitur in parabolam; ita recta BX, convergens ad punctum B, abit in rectam aliam, diametro AB parallelam.

FIG. 30. 38.

XII. Denique omnibus etiam parabolæ dia-

diametris accidit, ut *si ad aliquam ex iis tres ordinatæ continue proportionales demittantur, quarum extremæ tendant ad contrarias partes; recta, conjungens terminos istarum, transire debeat per punctum diametri, cui ordinata media correspondet.* XII. *Alia adhuc communis proprietas diametrorum parabolæ.* Fig. 47.

Sit enim AB diameter aliqua parabolæ AM, ad quam demittantur tres ordinatæ EG, MN, HL, ita ut ipsarum extremæ EG, HL tendant ad partes contrarias. Dico, rectam EH, conjungentem terminos istarum, transire per punctum N, cui correspondet ordinata media MN.

Est namque, propter parabolam, ut EG quadratum ad MN quadratum, ita AG ad AN. Et similiter, ut MN quadratum ad HL quadratum, ita AN ad AL. Quare, sicuti tres ordinatæ EG, MN, HL sunt continue proportionales; ita erunt etiam in continua proportione tres abscissæ AG, AN, AL, quæ cum quadratis earum ordinatarum eandem habent rationem.

Quum ergo AG sit ad AN, ut est AN ad AL; erit dividendo, ut GN ad AN, ita LN ad AL; & permutando, ut GN ad LN, ita AN ad AL. Sed AN est AL, ut MN quadratum ad HL quadratum, sive etiam, ut EG ad HL. Quare erit ex æquali, ut GN ad LN, ita EG ad HL: proindeque, quum duæ EG, HL parallelæ sint inter se, recta EH transibit per punctum N.

XIII. Sed *conversum hujus proprietatis pariter obtinet*. Nimirum, quod si ducatur intra parabolam recta quævis EH, quæ oc- XIII. *Præcedentis proprietatis conversum*

demonstratur. currat parabolæ quidem in punctis E, & H, alicui autem ex ejus diametris AB in puncto

FIG. 47. N; ordinata MN, huic puncto correspondens, sit media proportionalis inter ordinatas EG, HL, quæ ex iis punctis super diametro AB demittuntur.

Si enim EG non sit ad MN, ut est MN ad HL; capiatur ad eandem partem cum HL ordinata alia KI, quæ sit tertia proportionalis post duas EG, MN. Itaque, per proprietatem jam ostensam, recta KE transibit per punctum N: & propterea, vel idem habebit segmentum cum recta EF, quæ similiter transit per punctum N; vel cum ea spatium comprehendet. Quorum utrumque repugnat.

Non igitur esse potest, ut EG ad MN, ita MN ad KI. Quare erit, ut EG ad MN, ita MN ad HL: & propterea tres ordinatæ EG, MN, HL continue proportionales erunt. Sed, quemadmodum sunt continue proportionales tres ordinatæ EG, MN, HL; ita quoque erunt in continua proportione tres abscissæ AG, AN, AL: quippe quæ, ob parabolæ naturam, cum quadratis earum ordinatarum eandem habent rationem.

LI.

LIBER IV.

De Mutua Diametrorum, Parametrorumque Comparatione.

DEmonstravimus præcedenti libro, conicas sectiones, præter eam diametrum, quam in ipso cono sortiuntur, innumeras alias habere, quarum quælibet, ad instar principalis, suam quoque parametrum habet. Sed non abs re erit, inter se mutuo conferre, tum ipsas sectionum conicarum diametros, cum parametros earundem. Itaque de mutua ista diametrorum, parametrorumque comparatione agendum nobis erit hoc libro.

CAP. I.

Ellipsis diametri omnes inter se mutuo comparantur.

I. VIdimus superius, in qualibet ellipsi binas diametros extare, quæ cum ordinatis suis rectos angulos constituunt. Binas hasce diametros vocavimus axes ipsius ellipsis. Et demonstravimus quoque, ellipsim abire in circulum, quum duo ejus axes inter se sunt æquales.

I. *Diametrorum ellipsis maxima quidem est axis major, minima vero axis minor.* Fig. 48

Id quum ita sit, omnino necesse est, ut ex duobus axibus ellipsis unus quidem sit major, alter vero minor. Sed facile erit etiam ostendere, *diametrorum omnium ellipsis maximam quidem esse axem majorem, minimam vero axem minorem.*

Ellipsis enim AKBL sit AB axis major, & KL axis minor. Sit autem EF alia ejus diameter. Dico, aliam istam diametrum EF minorem esse axe majore AB, majorem vero axe minore KL.

Demissa siquidem ad axem majorem AB ordinata EG; erit, ob naturam ellipsis, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita EG quadratum ad rectangulum AGB. Sed KL quadratum minus est quadrato ex AB. Quare etiam EG quadratum minus erit rectangulo AGB.

Hinc, apposito communi quadrato ex CG, erit pariter CE quadratum minus quadrato, quod fit ex CA: & propterea, sicuti CE minor est, quam CA; ita quoque erit EF minor, quam AB.

Eadem ratione, demissa ad axem minorem KL ordinata EI; erit, propter ellipsim, ut AB quadratum ad KL quadratum, ita EI quadratum ad rectangulum KIL. Sed AB quadratum majus est quadrato ex KL. Quare etiam EI quadratum majus erit rectangulo KIL.

Hinc, apposito communi quadrato ex CI, erit pariter CE quadratum majus quadrato, quod fit ex CK: & propterea, sicuti CE major est, quam CK; ita quoque erit EF major, quam KL.

II. Nul-

II. Nullo itidem negotio ostendi potest, quod *omnium aliarum diametrorum illa quidem sit major, quæ vel minus distat ab axe majore, vel magis recedit ab axe minore.* II.

Ex diametris ellipsis illa major est, quæ distat, vel minus ab axe majore, vel magis ab axe minore

Fig. 48.

Quum enim CA quadratum sit æquale rectangulo AGB una cum CG quadrato, & CE quadratum sit æquale duobus quadratis EG, CG; erit excessus, quo CA quadratum superat CE quadratum, æqualis excessui, quo rectangulum AGB superat EG quadratum.

Quia autem rectangulum AGB ad EG quadratum datam habet rationem; habebit idem rectangulum AGB datam quoque rationem ad excessum ejus super EG quadratum: proindeque, quum minuitur rectangulum AGB, necesse est, ut ille pariter excessus minuatur.

Hinc etiam excessus, quo CA quadratum superat CE quadratum, minor fiet, quotiescumque minuitur rectangulum AGB. Et inde liquido patet, diametrum EF eo esse majorem, quo minus distat ab axe majore AB. Nam minui nequit distantia ista, nisi simul minuatur quoque rectangulum AGB.

Ostendi id ipsum potest, adhibito axe minore KL. Quum enim CE quadratum sit æquale duobus quadratis EI, CI; & CK quadratum sit æquale rectangulo KIL una cum CI quadrato; erit excessus, quo CE quadratum superat CK quadratum, æqualis excessui, quo quadratum ex EI superat rectangulum KIL.

Quia autem data est ratio inter EI quadratum, & rectangulum KIL; dabitur etiam

ratio inter excessum, quo EI quadratum superat rectangulum KIL, & ipsum rectangulum KIL: proindeque, quum augetur rectangulum istud, necesse est, ut ille pariter excessus augeatur.

Hinc etiam excessus, quo CE quadratum superat CK quadratum, major fiet, quotiescumque augetur rectangulum KIL. Et inde liquido patet, diametrum EF eo esse majorem, quo magis distat ab axe minore KL. Nam augeri nequit distantia ista, nisi simul augeatur quoque rectangulum KIL.

III. *Conjugatae diametri per ordinatas, super iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione.* Fig. 41.

III. Ellipsis igitur diametri in recessu ab axe majore minores evadunt, maximamque patiuntur diminutionem, quum maxime distant ab axe majore, hoc est, quum ad axem minorem perveniunt. Interim, dum eae minuuntur, augentur ipsarum conjugatae. Quod ut liquido constet, ostendendum est prius sequens theorema.

Nimirum, quod *si capiantur in ellipsi binae quaevis conjugatae diametri, eae dividantur in eadem ratione ab ordinatis, quae super iis demittuntur ex verticibus duarum quarumvis aliarum similiter conjugatarum diametrorum.*

Neque vero difficile erit, theorema istud ostendere, si eorum recordemur, quae superius ostensa sunt. Ellipsis enim AKBL sint AB, KL duae quaevis conjugatae diametri. Demittantur ad eas ordinatae EG, PQ ex verticibus duarum quarumvis aliarum similiter conjugatarum diametrorum EF, PR. Dico fore, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

Ducatur siquidem ad diametrum EF or-

-dinata AO. Tum per punctum O agatur recta OS, ipsi EG parallela. Et jam CK ad CQ rationem habebit compositam ex CK ad CP, & ex CP ad CQ. Sed CK est ad CP, ut KL ad PR, sive etiam, ut EG ad AO; itemque CP est ad CQ, ut AO ad OS. Itaque erit CK ad CQ in ratione composita ex EG ad AO, & ex AO ad OS.

Et quoniam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EG ad OS, sive etiam CE ad CO; erit ex æquali, ut CK ad CQ, ita CE ad CO; & convertendo, ut CK ad KQ, ita CE ad EO. Sed, sumptis antecedentium duplis, KL est ad KQ, ut EF ad EO. Quare dividendo erit, ut LQ ad KQ, ita FO ad EO: & propterea, quum FO sit ad EO, ut est BG ad AG; erit rursus ex æquali, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

IV. Ex isto autem theoremate *prono alveo fluit*, quadratum quidem ordinatæ EG esse æquale rectangulo KQL; quadratum vero ordinatæ PQ æquale esse rectangulo AGB.

IV. *Præcedentis proprietatis elegans consectarium, respiciens quadrata earum ordinatarum.*

FIG. 41.

Quum enim BG sit ad AG, ut est LQ ad KQ; erit componendo, ut AB ad AG, ita KL ad KQ. Unde, quia permutando AB est ad KL, tam ut AG ad KQ, quam ut BG ad LQ; compositis rationibus, erit, ut AB quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum KQL.

Jam, propter ellipsim, AB quadratum est ad KL quadratum, tam ut rectangulum AGB ad EG quadratum, quam ut PQ quadratum ad rectangulum KQL. Quare ex æquali, primo quidem erit, ut rectangulum AGB ad re-

cta-

ctangulum KQL, ita idem rectangulum AGB ad EG quadratum. Deinde vero, ut rectangulum AGB ad rectangulum KQL, ita PQ quadratum ad idem rectangulum KQL: & propterea rectangulo quidem KQL æquale erit EG quadratum; rectangulo vero AGB erit æquale PQ quadratum.

V. *Quadrata axium ellipsis sunt æqualia quadratis ex binis ejus diametris conjugatis.* FIG. 41.

V. Atque hinc ulterius nullo etiam negotio deducitur, *quadrata, quæ fiunt ex binis ellipseos diametris conjugatis, simul sumpta eandem ubique summam constituere, hoc est eam, quam quadrata duorum axium conficiunt.*

Referant enim AB, KL axes ipsius ellipsis, ita ut ordinatæ EG, PQ rectos cum iis angulos constituant. Ostendendum est igitur, quadrata, quæ fiunt ex axibus AB, KL, æqualia esse quadratis, quæ fiunt ex aliis conjugatis diametris EF, PR. Id vero ostendemus in hunc modum.

Quadratum ex CA est æquale rectangulo AGB una cum CG quadrato. Pariterque quadratum ex CK est æquale rectangulo KQL una cum CQ quadrato. Duo igitur quadrata CA, CK æqualia erunt duobus rectangulis AGB, KQL una cum duobus quadratis CG, CQ.

Quum autem rectangulo AGB ostensum sit æquale quadratum ex PQ, & rectangulo KQL æquale quadratum ex EG; erunt duo quadrata PQ, EG æqualia duobus rectangulis AGB, KQL: & ideo quadrata duo CA, CK æqualia erunt quatuor quadratis, quæ fiunt ex PQ, EG, CG, CQ.

Jam ex quatuor hisce quadratis duo PQ,

CQ

CQ sunt æqualia quadrato ex CP; alia vero duo EG, CG sunt æqualia quadrato ex CE. Quare eadem quadrata CA, CK æqualia erunt duobus quadratis CE, CP; atque adeo quadrata ex totis AB, KL, æqualia erunt pariter iis, quæ fiunt ex totis EF, PR.

VI. Ex eo autem, quod quadrata, quæ fiunt ex binis ellipseos diametris conjugatis, simul sumpta, eandem ubique summam constituant, facile modo erit ostendere id, quod nobis ab initio proposuimus: nimirum, quod *dum primariæ diametri minuuntur in recessu ab axe majore, vicissim conjugatæ ipsarum augeantur.*

VI. *Quum primariæ diametri minuuntur, necesse est, ut augeantur ipsarum conjugatæ.* Fig. 48.

Maneant enim omnia, ut supra, adeo nempe, ut AB sit axis major ellipsis, KL axis minor, & EF diameter quævis. Sit autem PR conjugata diametri hujus EF. Dico, non posse diametrum EF minorem fieri, nisi ipsius conjugata PR vicissim augeatur.

Nam quadrata ex ipsis EF, PR simul sumpta debent ubique æqualia esse quadratis, quæ fiunt ex axibus AB, KL. Quare excessus, quo AB quadratum superat EF quadratum, erit semper æqualis excessui, quo vicissim PR quadratum superat KL quadratum; & propterea nequit excessus ille augeri, nisi iste pariter augeatur.

Jam, ubi per recessum ab axe majore AB minor evadit diameter FF, tunc augetur excessus, quo AB quadratum superat EF quadratum. Quare in eodem recessu necesse est, ut augeatur etiam excessus, quo PR quadratum superat KL quadratum: & propterea ipsa PR major evadet.

VII. Non

VII. *Theoremata duo de ratione cujusvis diametri ellipsis ad suam conjugatam.* Fig. 48.

VII. Non igitur dubitari potest, quin interea ac primariæ diametri minuuntur in recessu ab axe majore, vicissim conjugatæ ipsarum augeantur. Inde autem, sicuti clare patet, *accedere conjugatas diametros ad axem majorem, ubi primariæ, ad quas velut conjugatæ referuntur, ab eodem axe recedunt*; sic etiam non obscure *colligi possunt sequentia duo theoremata.*

Nimirum primo, quod axis major AB ad axem minorem KL majorem dabeat rationem, quam diameter quævis alia EF ad suam conjugatam PR.

Quum enim AB major sit, quam EF; habebit AB ad KL majorem rationem, quam EF ad KL. Sed KL minor est, quam PR; atque adeo EF majorem habet rationem ad KL, quam ad PR. Itaque ratio, quam habet AB ad KL multo major erit ratione, quam habet EF ad PR.

Secundo, quod diameter EF, axi majori propinquior, majorem habeat rationem ad suam conjugatam PR, quam diameter DH, ab eodem illo axe remotior, ad conjugatam suam QS.

Quum enim EF major sit, quam DH; habebit EF ad PR majorem rationem, quam DH ad PR. Sed PR minor est, quam QS; atque adeo DH majorem habet rationem ad PR, quam ad QS. Itaque ratio, quam habet EF ad PR multo major erit ratione, quam habet DH ad QS.

VIII. *Locus omnium dia-*

VIII. Cæterum, ut alia quamplurima, quæ locum habent in comparatione diametrorum

rum ellipsis, tum hic, cum in sequentibus facilius prosequi valeamus, juvat hic advertere, quod *locus diametrorum omnium ellipsis per dati cujusdam circuli portionem possit exhiberi.* *metrorum ellipsis exhiberi possit per dati cujusdam circuli portionem.*

Referant namque rectæ duæ AC, BC axes ellipsis, hoc est AC axem majorem, & BC axem minorem; junctisque iis ad angulos rectos, describatur super AB semicirculus ACB, & agatur per punctum C recta CD, ipsi AB parallela, quæ occurrat circumferentiæ ad partem alteram in D. Dico, portionem ejusdem circumferentiæ CED considerari posse veluti locum omnium diametrorum ellipsis. FIG. 49.

Primo enim, ex superius ostensis, quælibet ellipsis diameter debet esse minor axe majore AC, & major axe minore BC, vel AD. Sed omnes rectæ, quæ ducuntur ex puncto A ad portionem circumferentiæ CED, minores sunt recta AC, majores vero recta AD. Itaque poterunt rectæ istæ omnes ellipsis diametros exhibere.

Deinde, ostensum est quoque, quadrata ex binis ellipseos diametris conjugatis, simul sumpta, æqualia esse quadratis axium AC, BC. Sed, inclinatis ad punctum quodvis E ejusdem portionis CED rectis AE, BE, quadrata istarum, velut æqualia quadrato ex AB, adæquant quadrata, quæ fiunt ex ipsis AC, BC. Itaque, si AE referat diametrum aliquam primariam ellipsis, erit BE ejus conjugata.

IX. Hoc jacto principio, jam circa comparationem diametrorum ellipsis duo alia theoremata facillime licebit ostendere. Horum pri- IX. *Theorema de rectangulo sub binis*

ellipseos conjugatis diametris comprehenso. FIG. 49.

primum est, quod *rectangulum ex binis ellipseos diametris conjugatis eo majus evadat, quo magis ipsæ diametri ad æqualitatem accedant; & maximum fiat, ubi omnino inter se sunt æquales.*

Ut enim rectæ AC, BC referunt axes ellipsis, sic rectæ AE, BE referant binas ejus diametros conjugatas. Dico, rectangulum AEB eo majus esse relate ad rectangulum ACB, quo duæ AE, BE minus a se mutuo differunt; & maximum fieri, quum eædem AE, BE inter se sunt æquales.

Demittantur siquidem super AB perpendiculares CF, EG. Jamque istarum quadrata proportionalia erunt rectangulis AFB, AGB, quæ iis quadratis sunt æqualia. Sed rectangulum AFB est ad rectangulum AGB in ratione composita ex AF ad AG, & ex BF ad BG. Itaque in hac eadem composita ratione erit pariter CF quadratum ad EG quadratum.

Jam, assumpta communi altitudine AB, AF est ad AG, ut rectangulum BAF ad rectangulum BAG, sive etiam, ut AC quadratum ad AE quadratum. Et similiter, assumpta eadem communi altitudine AB, BF est ad BG, ut rectangulum ABF ad rectangulum ABG, sive etiam, ut BC quadratum ad BE quadratum. Quare CF quadratum ad EG quadratum habebit rationem compositam ex AC quadrato ad AE quadratum, & ex BC quadrato ad BE quadratum.

Hinc, capiendo latera omnium horum quadratorum, habebit quoque CF ad EG rationem compositam ex AC ad AE, & ex

BC

BC ad BE. Sed duæ istæ rationes componunt itidem rationem, quam habet rectangulum ACB ad rectangulum AEB. Quare erit ex æquali, ut CF ad EG, ita rectangulum ACB ad rectangulum AEB: ex quo facili negotio propositi theorematis veritas constat.

X. Alterum theorema est, quod *summa quoque ex binis ellipseos diametris conjugatis eo major evadat, quo magis ipsæ diametri ad æqualitatem accedunt; & maxima itidem fiat, ubi omnino inter se sunt æquales.* X. *Theorema de summa duarum ellipseos conjugatarum diametrorum.*

Maneant enim omnia, ut supra. Dico, summam ex diametris conjugatis AE, BE eo majorem esse relate ad summam axium AC, BC, quo ipsæ AE, BE minus a se mutuo differunt; & maximam fieri, cum eædem AE, BE inter se sunt æquales. FIG. 49.

Ex præcedenti theoremate rectangulum AEB relate ad rectangulum ACB ea quidem lege augetur. Itaque etiam duplum illius rectanguli eadem lege augebitur relate ad duplum istius. Et, addendo iis commune quadratum ex AB, eadem pariter erit lex incrementi quadrati ex AB una cum duplo rectanguli AEB relate ad idem AB quadratum, auctum duplo rectanguli ACB.

Quoniam autem AB quadratum est æquale duobus quadratis AE, BE; erit AB quadratum una cum duplo rectanguli AEB æquale quadrato, quod fit ex summa ipsarum AE, BE. Et similiter, quia AB quadratum est æquale duobus quadratis AC, BC; erit AB quadratum una cum duplo rectanguli ACB æquale quadrato, quod fit ex ipsis AC, BC simul sumptis.

Id

Id vero quum ita ſit, neceſſe eſt, ut eadem illa lege augeatur quoque quadratum, quod fit ex ſumma ipſarum AE, BE, relate ad quadratum, quod fit ex ipſis AC, BC ſimul ſumptis: & propterea eadem erit pariter lex, qua ſumma ex conjugatis diametris AE, BE augetur relate ad ſummam axium AC, BC.

XL. *Quod in omni ellipſi dentur duæ diametri conjugatæ, quæ inter ſe ſunt æquales.*

XI. Neque vero difficile erit oſtendere, *dari in qualibet ellipſi binas diametros conjugatas æquales inter ſe, ad quas quo magis accedunt binæ aliæ conjugatæ, eo minus a ſe mutuo differant.*

Ellipſis namque AKBL ſit AB axis major, & KL axis minor. Junganτur ſubtenſæ AK, AL; Et, biſectis iis in punctis O, & V, agantur per puncta iſta diametri EF, PR. Dico primo, diametros iſtas æquales eſſe inter ſe.

FIG. 48.

Quoniam enim axis major AB ſecat ordinatas ſuas, non modo bifariam, verum etiam ad angulos rectos; idem axis adeo quidem dividet ellipſim in duas partes AKB, ALB, ut una alteri ſuperimpoſita, congruent omnino. Sed in hac ſuperimpoſitione congruunt etiam, tum ſubtenſæ AK, AL, cum diametri EF, PR. Itaque binæ iſtæ diametri EF, PR æquales erunt inter ſe.

Dico ſecundo, earundem diametrorum EF, PR alteram alterius conjugatam eſſe. Jungatur enim ſubtenſa alia BL. Et, ob axes AB, KL biſectos in centro C, duæ AK, BL parallelæ erunt inter ſe. Sed, quum ſit, ut AV ad VL, ita AC ad CB; eadem BL parallela eſt quoque ipſi PR. Quare & PR ipſi AK parallela

lela erit; & consequenter PR conjugata erit ipsius EF.

Dico denique, quod si DH, QS fuerint binæ aliæ ellipsis conjugatæ diametri; eæ tanto minus a se mutuo differant, quo magis accedunt ad ipsas EF, PR. Nam, ex superius ostensis, si una DH minuatur in accessu ad EF, altera QS augebitur accedendo ad PR. Et per contrarium si illa augeatur, hanc minui oportebit.

XII. Nolim autem hoc loco reticere, quod etsi rectangulum ex binis ellipseos diametris conjugatis eo majus evadat, quo magis ipsæ diametri ad æqualitatem accedunt, & maximum fiat, ubi omnino inter se sunt æquales; attamen *parallelogrammum, circa binas ellipsis conjugatas diametros descriptum, sit ejusdem ubique magnitudinis, hoc est æquale semper rectangulo, quod sub ipsis axibus continetur.*

XII. *Parallelogrammum, circa duas ellipsis conjugatas diametros descriptum, est æquale rectangulo sub axibus.* Fig. 50.

Ellipsis enim AKBL sit AB axis major, & KL axis minor. Sint autem EF, PR binæ ejus conjugatæ diametri. Ducantur per puncta E, & F rectæ QS, TV, ipsi PR parallelæ; tum item per puncta P, & R rectæ QV, TS, æquidistantes ipsi EF: ita, ut circa diametros conjugatas EF, PR descriptum sit parallelogrammum QSTV. Dico, parallelogrammum istud æquale esse rectangulo, quod sub axibus AB, KL continetur.

Demittatur, tum ad axem AB ordinata EG, cum ad diametrum EF ordinata AO. Et, ex superius ostensis, erit, ut EG ad AO, ita KL ad PR; sive etiam, ita CK ad CP. Sed, demissis super CE, CP perpendicularis AI, EH,



EG est ad AO in ratione composita ex EG ad AI, & ex AI ad AO; hoc est in ratione composita ex CE ad CA, & ex EH ad CE. Quare etiam CK ad CP rationem habebit compositam ex EH ad CE, & ex CE ad CA.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EH ad CA. Quare erit ex æquali, ut CK ad CP, ita EH ad CA; & propterea rectangulum ex CP in EH, hoc est parallelogrammum PCEQ, erit æquale rectangulo, quod fit ex CA in CK. Sed parallelogrammum QSTV est quadruplum parallelogrammi PCEQ, & rectangulum sub axibus AB, KL est quadruplum rectanguli ACK. Quare etiam parallelogrammum QSTV æquale erit rectangulo sub axibus AB, KL.

XIII. *Theoremata de angulis, quos conjugatæ diametri in ellipsis centro constituunt.* FIG. 50.

XIII. Hinc vero plura deducuntur *circa angulos, quos ellipseos conjugatæ diametri occursu mutuo in centro constituunt.*

Nimirum primo, quod *sinus anguli, sub duabus quibuslibet conjugatis diametris contenti, sit ad radium, ut est rectangulum sub axibus ad id, quod sub ipsis diametris continetur.*

Positis enim omnibus, ut supra, sinus anguli ECP est ad radium, ut EH ad CE; sive etiam, ut rectangulum ex CP in EH ad rectangulum ex CP in CE. Sed rectangulum ex CP in EH ostensum est æquale rectangulo ACK: quod quidem est ad rectangulum ex CP in CE, ut rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR. Quare erit ex æquali, ut sinus anguli ECP ad radium, ita rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR.

Se-

Secundo, quod *sinus angulorum, quos conjugatæ diametri occursu mutuo in centro constituunt, sint reciproce, ut rectangula, quæ fiunt ex ipsis diametris conjugatis.*

Jam enim ostensum est, quod sinus anguli, quem duæ quævis conjugatæ diametri continent, sit ad radium, ut est rectangulum sub axibus ad id, quod sub ipsis diametris continetur. Quare, ex æquo perturbando, sinus anguli duarum conjugatarum erit ad sinum anguli, quem aliæ duæ conjugatæ comprehendunt, ut est rectangulum istarum ad id, quod ex iis efficitur.

Denique, quod *angulus acutus, sub binis ellipseos diametris conjugatis comprehensus, eo minor evadat, quo magis ipsæ diametri ad æqualitatem accedunt; & minimus fiat, ubi omnino inter se sunt æquales.*

Nam, ex superius ostensis, rectangulum, quod binæ ellipseos conjugatæ diamerri continent, eo majus evadit, quo magis eæ diametri ad æqualitatem convergunt. Sed ei rectangulo est reciproce proportionalis sinus anguli, sub iisdem diametris contenti. Quare per contrarium, tam sinus, quam ipse angulus acutus, ad quem sinus refertur, necesse est, ut eo minor fiat, quo magis conjugatæ diametri ad æqualitatem accedunt.

CAP. II.

Parametri diametrorum ellipsis inter se mutuo conferuntur.

I. Duae ellipsis diametri conjugatae sunt continuè proportionales cum suis parametris, ubi inverso ordine inter eas collocantur. Fig. 51.

I. COmparatis inter se mutuo diametris ellipsis, sequitur, ut parametros ipsarum ad invicem conferamus. Et primo quidem, *quum conjugatae fuerint eae diametri, quarum parametros simul conferre oportet, facile erit, de iis parametris dijudicare*.

In parametris enim, quae ad duas diametros conjugatas referuntur, istud obtinet theorema, quod *ipsae diametri continuam cum eis proportionem constituant, ubi inverso ordine inter illas collocantur*.

Ellipsis namque AKBL sint AB, KL binae ejus diametri conjugatae. Sit autem AD parameter unius AB, & KI parameter alterius KL. Dico, diametros AB, KL, inverso ordine positas inter suas parametros AD, KI, continuam cum eis proportionem constituere.

Quoniam enim KL est conjugata ipsius AB; erit, ut AD ad KL, ita KL ad AB. Et similiter, quoniam AB est conjugata ipsius KL; erit ut KL ad AB, ita AB ad KI. Quare quatuor AD, KL, AB, KI continue proportionales erunt.

II. Comparatio parametrorum, quae

II. Hinc autem *plura deducuntur circa parametros, quae ad duas diametros conjugatas referuntur*.

Ni-

Nimirum primo, quod si duæ conjugatæ diametri AB, KL inter se sint æquales; etiam parametri AD, KI debeant esse æquales, tam inter se, quam cum diametris suis. *ad duas ellipsis diametros conjugatas referuntur.* FIG. 51.

Secundo, quod si vicissim duæ conjugatæ diametri AB, KL sint inæquales; parametri quoque AD, KI debeant esse inæquales, tam inter se, quam cum qualibet earum diametrorum.

Tertio, quod ex diametris AB, KL ea, quæ major est, habeat parametrum, tum ipsa, cum diametro altera minorem; illa vero, quæ minor est, parametrum habeat, etiam altera diametro majorem.

Quarto, quod quum inæquales sunt diametri AB, KL, & inæquales adeo ipsarum parametri AD, KI, summa parametrorum major sit semper summa diametrorum.

Et denique, quod si capiatur differentia, tam inter diametrum AB, & parametrum suam AD; quam inter diametrum KL, & suam parametrum KI; ea quidem differentia sit major, quæ ad minorem diametrum, majoremque adeo parametrum refertur.

III. Ubi autem diametri non fuerint conjugatæ, poterit de parametris ipsarum judicium ferri, ostenso prius hoc theoremate, quod *si quadrato alicujus diametri figura ejus adjiciatur, summa, quæ inde oritur, eadem ubique erit.* III. *In ellipsi quadratum diametri una cum ejus figura eandem ubique summam constituit.*

Maneant enim omnia, ut supra. Dico, quod si ad quadratum diametri AB apponatur figura ejus, quæ constituitur per rectangulum DAB; summa, inde confecta, sit semper FIG. 51.

eadem, quocumque in loco capiatur diameter AB.

Ex superius siquidem ostensis, eadem ubique summa conficitur, si ad quadratum diametri AB adjiciatur quadratum, quod fit ex ejus conjugata KL. Sed quadratum ex KL est æquale rectangulo DAB. Quare, si eidem AB quadrato apponatur rectangulum DAB, summa inde orta pariter eadem ubique erit.

IV. *Duæ ellipsis diametri, sunt reciproce proportionales summis laterum suarum figurarum.*

IV. Inde vero inferre licet, *duas quasvis diametros ellipsis reciproce proportionales esse summis laterum suarum figurarum.*

Ut enim diametri AB parameter est AD, ita sit EH parameter cujusvis alterius diametri EF. Dico, AB esse ad EF, ut est summa ipsarum EF, EH ad summam ex ipsis AB, AD. FIG. 51.

Ob ostensum namque theorema, eadem summa oritur, tam si ad AB quadratum adjiciatur rectangulum DAB, quam si ad EF quadratum apponatur rectangulum HEF. Itaque AB quadratum una cum rectangulo DAB æquale erit EF quadrato una cum rectangulo HEF.

Jam AB quadratum una cum rectangulo DAB tantundem valet, ac rectangulum ex AB in summam ipsarum AB, AD. Et similiter EF quadratum una cum rectangulo HEF perinde est, ac rectangulum ex EF in summam ex ipsis EF, EH. Quare, quum æqualia sint inter se duo ista rectangula; erit, ut AB ad EF, ita summa duarum EF, EH ad summam duarum AB, AD.

V. Atque hinc modo facile erit ostende-

re,

re, quod *ex binis ellipseos diametris ea, quæ major est, minorem parametrum habeat.*

V. *Ex duabus diametris ellipsis ea, quæ minor est, majorem parametrum habet.*

Maneant enim omnia, ut supra. Et ponamus, diametrum AB majorem esse diametro EF. Dico, parametrum AD, quæ refertur ad diametrum majorem, esse vicissim minorem parametro EH, quæ refertur ad diametrum minorem. Fig. 51.

Ostensum est namque, quod diameter AB sit ad diametrum EF, ut est summa ipsarum EF, EH ad summam ex ipsis AB, AD. Quare, sicuti AB major est, quam EF; ita & duæ EF, EH majores erunt duabus AB, AD.

Parameter igitur EH, adsciscens suam diametrum EF, majorem summam constituit, quam parameter AD, assumens diametrum suam AB. Sed EF minor est, quam AB. Itaque EH multo major erit, quam AD.

VI. *Comparatio parametrorum, quæ ad ellipsis diametros omnes referantur.*

VI. Id quum ita sit, perspicuum est, quod sicuti omnium diametrorum ellipsis maxima est axis major, minima vèro axis minor; sic vicissim *omnium parametrorum minima quidem sit illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima vero ea, quæ refertur ad axem minorem.* Fig. 51

Liquet etiam, quod sicuti diameter in recessu ab axe majore, & in accessu ad minorem continuo minuitur, maximamque patitur diminutionem, quum ad ipsum axem minorem pervenit; sic vicissim *ejus parameter continuo augeatur, maximumque incrementum subeat in ipso axe minore.*

Quia autem ostensum est, parametrum ejus diametri, quæ conjugatam habet æqualem, adæquare diametrum suam; liquet de-

 mum,

mum, *parametrum minorem esse diametro, ad quam refertur, ab axe majore usque ad eum locum, in quo aequalitatis diameter reperitur; esse vero majorem, ab eo loco usque ad axem minorem.*

VII. *Locus, ad quem terminantur parametri omnium diametrorum ellipsis, definitur.*

VII. Sed nolim hic reticere, quod sicuti locus omnium diametrorum ellipsis exhiberi potest per dati cujusdam circuli portionem; sic *locus omnium parametrorum sit portio rectae lineae, quae circuli ejus circumferentiam in dato quodam puncto contingit.*

FIG. 49. Si enim rectae AC, BC referant axes ellipsis, hoc est AC axem majorem, & BC axem minorem; junctisque iis ad angulos rectos, describatur super AB semicirculus ACB, & ducatur per punctum C recta CD, ipsi AB parallela; erit, ex superius ostensis, portio CED locus omnium diametrorum ellipsis.

Jam, si ex puncto B erigamus super AB perpendicularem BH, cum qua conveniat, tum axis major AC in puncto H, cum axis minor AD in puncto I: quemadmodum recta ista BH continget circumferentiam in puncto B; ita portio hujus tangentis HI erit nobis veluti locus omnium parametrorum ellipsis.

Est enim portio circumferentiae CED locus omnium diametrorum ellipsis; quia quaelibet ellipsis diameter exhiberi potest per rectam, quae ducitur ex puncto A ad eam portionem. Et, ob eandem rationem, erit portio tangentis HI locus omnium parametrorum; quia, si AE fuerit diameter quaevis, eademque extendatur, usque donec tangenti occurrat in K, erit EK parameter ipsius AE.

VIII. Ne-

VIII. Neque vero difficile erit, *rei hujus veritatem ostendere*, tam relate ad ipsos axes AC, AD, quam respectu cujusvis alterius diametri AE, si ejus recordemur, quod supra demonstravimus, nimirum conjugatam diametri AE esse rectam alteram BE, ductam ad idem punctum E ex termino altero B. VIII. *Demonstratio determinationis praecedentis.* FIG. 49.

Est namque triangulum ABH rectangulum in B. Quare, quum ex angulo recto demissa sit super hypothenusam AH perpendicularis BC; erit, ut AC ad BC, ita BC ad CH. Sed parameter axis majoris est tertia proportionalis post ipsum axem majorem, & axem alterum minorem. Itaque erit CH parameter axis majoris AC.

Eadem ratione, quoniam triangulum ABI rectum habet angulum in B, & ex angulo recto demissa est super hypothenusam AI perpendicularis BD; erit ut AD ad BD, ita BD ad DI. Sed parameter axis minoris est tertia proportionalis post ipsum axem minorem, & axem alterum majorem. Itaque erit DI parameter axis minoris AD.

Denique, quia triangulum ABK est rectangulum in B, & ex angulo recto demissa est super hypothenusam AK perpendicularis BE; erit ut AE ad BE, ita BE ad EK. Sed parameter diametri AE est tertia proportionalis post ipsam diametrum AE, & ejus conjugatam. Itaque quum sit BE conjugata diametri AE, erit EK parameter ejusdem diametri AE.

IX. Id quum ita sit, *jam veritas eorum omnium, quae paulo ante a nobis ostensa sunt circa parametros diametrorum ellipsis, rursus apparebit.* IX. *Veritas eorum, quae in comparatio-*

Pro-

ne parametrorum ellipsis locum habent, rursus demonstratur.

Fig. 49.

Protractis siquidem ad tangentem usque BH rectis omnibus, quæ ducuntur ex puncto A ad circumferentiam CED; perspicuum est, ex portionibus ipsarum, quæ tangente, & circulo intercipiuntur, minimam quidem esse CH, maximam vero DI. Itaque parametrorum omnium ellipsis minima quidem erit *illa*, quæ refertur ad axem majorem AC; maxima vero ea, quæ refertur ad axem minorem AD.

Deinde perspicuum est quoque, easdem illas portiones eo magis augeri, quo magis a puncto B removentur, atque adeo, quo minores sunt rectæ, cum quibus jacent in directum. Quare similiter parametri ellipsis tanto quidem majores erunt, quanto minores sunt diametri, ad quas eæ referuntur.

Ad hæc, si duæ AE, BE fuerint inter se mutuo æquales, utrique ipsarum erit æqualis quoque EK; quum sit, ut AE ad BE, ita BE ad EK. Unde rursus liquet, parametrum ejus diametri, quæ conjugatam habet æqualem, longitudine sua, tum ipsam diametrum, ad quam refertur, cum conjugatam ejus adæquare.

Denique, quum tres AE, BE, EK sint continue proportionales, erit EK minor, quam AE, quotiescumque AE superat BE; erit vero major, quum vicissim BE superat AE. Unde rursus apparet, ab axe majore usque ad diametrum, quæ conjugatam habet æqualem, esse parametros minores suis diametris; esse vero majores, ab ea diametro usque ad axem minorem.

X. Exinde etiam colligi denuo potest ve-

sitas

ritas theorematis, superius ostensi, quod *duæ quævis ellipseos diametri sint reciproce proportionales summis laterum suarum figurarum.* X. Rursus ostenditur, quod diametri ellipsis reciproce correspondeant summis laterum suarum figurarum.

Si enim AE referat ellipsis diametrum aliquam; protracta ea usque ad tangentem BH, fiet EK parameter ejus. Unde erit AK summa laterum suæ figuræ. Sed AK est ad AB, ut AB ad AE. Quare rectangulum, quod fit ex diametro AE in summam laterum suæ figuræ, æquale erit quadrato ipsius AB. FIG. 49.

Simili ratione ostendemus, eidem AB quadrato æquale esse rectangulum, quod fit ex quavis alia diametro in summam laterum figuræ suæ. Quare æqualia erunt inter se rectangula, quæ fiunt ex duabus quibusvis diametris in summas laterum suarum figurarum: & propterea summis istis reciproce proportionales erunt ipsæ diametri.

XI. Quamquam autem vi hujus theorematis, summa laterum figuræ diametri eo sit minor, quo magis ipsa diameter ad majorem axem accedit; *differentia tamen eorundem laterum eo minor evadit, quo magis diameter accedit ad eam, quæ tam parametrum, cum conjugatam habet æqualem.* XI. Theorema de summa, & differentia laterum figuræ diametri. FIG. 49.

Sit enim AE diameter illa, cui æqualis est, tam parameter EK, quam conjugata BE. Jamque, ex superius ostensis, parametri minores erunt suis diametris ab axe majore usque ad AE; erunt vero per contrarium majores ab AE usque ad axem minorem.

Quia autem in accessu ab axe majore ad ipsam AE, parametri quidem augentur, diametri vero minuuntur; omnino necesse est, ut

in

in accessu isto decrescat differentia laterum figuræ. Sed decrescet quoque in accessu ab axe minore ad eandem AE; quia hic per contrarium diametri quidem augentur, parametri vero diminutionem patiuntur.

Ob æquales porro AE, EK, liquet, differentiam laterum figuræ diametri, tam in accessu ab axe majore ad ipsam AE, quam in accessu ab axe minore ad eandem AE, decrescere eo usque, ut tandem evanescat. Et quamquam eadem differentia maximum subeat incrementum sub ipsis axibus; per ea tamen, quæ superius ostensa sunt, major est sub axe minore, quam sub axe majore.

XII. *Theoremata de summa, & differentia quadratorum, quæ fiunt ex iisdem figuræ lateribus.*

XII. Quod ostensum est de differentia laterum figuræ, verum est quoque *de differentia quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus*; idque eadem omnino ratione demonstratur. Quantum vero *ad summam eorundem quadratorum* duo sunt casus distinguendi.

Primus casus est, quum quadratum ex axe majore non majus est dimidio quadrati, quod fit ex summa laterum suæ figuræ. Et quum id contingit, quadrata ex lateribus figuræ diametri, simul sumpta, eo minorem summam conficient, quo ipsa diameter magis accedit ad axem majorem.

Alter casus est, quum per contrarium est majus. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum æquale sit quadrato, quod fit ex summa laterum suæ figuræ; eo minorem constituent summam quadrata ex lateribus figuræ alterius diametri, quo magis altera ista diameter ad priorem illam accedit.

XIII. Pen-

XIII. Pendet autem utriusque demonstratio *ex pulcherrima ista circuli proprietate*, quod si ex extremitate diametri A ducatur ad tangentem AH recta AM talis longitudinis, ut AN quadratum æquale sit dimidio quadrati ipsius AM, summa quadratorum AE, EK eo quidem sit minor, quo magis AK accedit ad AM.

XIII. Demonstratio theorematum de summa, ex eleganti circuli proprietate deducta.

Ponamus etenim primo, quod AC quadratum non sit majus dimidio quadrati, quod fit ex AH. Et quia AC est ad AH, ut AF ad AB; nec etiam AF quadratum majus erit dimidio quadrati, quod fit ex AB. Quare, si fiat AO quadratum æquale dimidio quadrati ipsius AB, non erit AO minor, quam AF; sed vel æqualis, vel major. Fig. 52.

Erigatur itaque ex puncto O perpendicularis ON, circumferentiæ occurrens in puncto N, per quod agatur recta AM. Et quia AO est ad AB, ut AN ad AM; etiam AN quadratum æquale erit dimidio quadrati, quod fit ex AM. Quare, per eam circuli proprietatem, summa quadratorum AE, EK eo minor erit, quo magis AK accedit ad AM, & consequenter ad AH.

Ponamus secundo, quod AC quadratum majus sit dimidio quadrati, quod fit ex AH. Et quia etiam AF quadratum majus erit dimidio quadrati, quod fit ex AB; si fiat, ut huic dimidio æquale sit AO quadratum, erit AO minor, quam AF. Unde, erecta perpendiculari ON, dabitur diameter AN, cujus quadratum adæquat dimidium quadrati, quod fit ex summa laterum suæ figuræ: & propterea, per Fig. 53.

ean-

eandem circuli proprietatem, summa quadratorum ex lateribus figuræ cujusvis alterius diametri AE eo minor erit, quo magis altera ista diameter accedit ad AE.

XIV. *Demonstratio ejus proprietatis, quæ circulo competit.* FIG. 52.

XIV. Si autem consideremus, angulum quemvis rectilineum, ubi vertitur circa verticem suum, eo minorem ex recta positione data cruribus suis portionem abscindere, quo magis accedit ad eam positionem, in qua crura ejus æqualia fiunt; haud difficulter *præfatæ proprietatis, quæ circulo competit, veritatem demonstrabimus.*

Si enim sit G centrum circuli; erunt quadrata duo AF, BF dupla quadratorum, quæ fiunt ex AG, GF; & consequenter dupla quoque quadrati, quod fit ex EF. Unde, quemadmodum summa quadratorum AC, CH est ad summam quadratorum AF, BF, ut AC quadratum ad AF quadratum, sive etiam, ut AB ad AF; ita eadem summa quadratorum AC, CH erit ad duplum quadrati, quod fit ex EF, similiter ut AB ad AF.

Jam, si fiat angulus FES æqualis angulo EAF; erit, ut AF ad EF, ita EF ad FS: proindeque, quum EF quadratum sit æquale rectangulo AFS; erit adhuc, ut summa quadratorum AC, CH ad duplum rectanguli AFS, ita AB ad AF: & propterea, quia AB est ad AF, ut rectangulum ex AB in FS ad rectangulum AFS; erit summa quadratorum AC, CH æqualis duplo rectanguli, quod fit ex AB in ipsam FS.

Simili autem ratione ostendemus, quod si fiat angulus OER, æqualis eidem angulo EAF,

EAF, summa quadratorum AN, NM sit æqualis duplo rectanguli, quod fit ex AB in OR. Unde erit, ut summa quadratorum AC, CH ad summam quadratorum AN, NM, ita FS ad OR: proindeque, quia duo anguli FES, OER, qui cruribus suis abscindunt ex AB portiones FS, OR, sunt æquales inter se; jam incidimus in eum casum, in quo angulus rectilineus vertitur circa verticem suum, & ex recta positione data cruribus suis portionem abscindit.

Id quum ita sit, eo res redit, ut ostendamus, angulum istum, quum abscindit portionem OR, talem positionem habere, ut æqualia sint crura ejus EO, ER. Id vero liquet abunde. Nam, quemadmodum AN quadratum adæquat dimidium quadrati, quod fit ex AM, ita AO quadratum æquale erit dimidio quadrati, quod fit ex AB. Sed AE quadratum, velut æquale quadratis AG, EG, dimidium istud similiter adæquat. Quare duæ AE, AO æquales erunt inter se: & propterea, ob triangula æquiangula AEO, OER, erunt etiam æquales duæ EO, ER.

C A P. III.

Problemata quædam circa ellipsis diametros, & parametros resolvuntur.

I. Circa diametros ellipsis, earundemque parametros plura possunt proble- *I. Datis axibus ellipsis*

Invenire duas diametros conjugatas, quarum data sit ratio.

FIG. 49.

blemata institui, elegantia quidem per se ipsa, tum etiam apprime utilia. Eo hoc capite cursim prosequi, haud equidem gravabimur; eoque magis, quod nullo negotio resolvantur, postquam nobis innotuit, diametros omnes ellipsis in dati cujusdam circuli portione reperiri; easdemque, ad datam usque tangentem productas, parametros nobis exhibere.

Primum itaque problema hoc erit: *datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter se.* Referant ergo rectæ duæ AC, BC axes ellipsis, hoc est AC axem majorem, & BC axem minorem. Jamque, si junctis iis ad angulos rectos, describatur super AB semicirculus ACB, ducaturque recta CD, ipsi AB parallela; erit, ex superius ostensis, portio circumferentiæ CED locus omnium diametrorum ellipsis.

Quia autem, ex superius ostensis, axis major ad axem minorem habet majorem rationem, quam quævis alia diameter ad suam conjugatam; utique data ratio, tum directe, cum inverse sumpta, minor esse debet ea, quam habet AC ad BC. Itaque, si fiat primo, ut AC sit ad CR in data illa ratione: erit CR major, quam BC. Et si fiat secundo, ut BC sit ad AC, veluti est AC ad CS; erit CR minor, quam CS.

Hinc, junctis rectis AR, AS, erit angulus ARC minor quidem angulo ABC, major vero angulo ASC. Sed, ob triangula æquiangula ABC, ACS, angulus ASC æqualis est angulo BAC, sive ABD. Quare idem angulus ARC, ut est minor angulo ABC, sic major

erit

erit angulo ABD: & propterea, si fiat angulus ABE, æqualis angulo ARQ; recta BE cadet inter duas BC, BD; adeoque terminabitur ad portionem circumferentiæ CED.

Inde vero consequitur, rectas duas AE, BE esse diametros conjugatas ejus ellipsis, cujus axes sunt rectæ AC, BC. Et quoniam, ob triangula æquiangula AEB, ACR, ratio ipsarum AE, BE æqualis est ei, quam habet AC ad CR; liquet, easdem AE, BE esse etiam in data ratione. Unde diametri conjugatæ, quæ proposito problemati satisfaciunt, eæ erunt, quas exhibent ipsæ AE, BE.

II. Secundum problema ita se habet: *datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.* Referant adhuc rectæ duæ AC, BC axes ellipsis: adeo, ut iisdem, ut supra, peractis, sit portio circumferentiæ CED locus omnium diametrorum ellipsis. Et quoniam, ex superius ostensis, rectangulum sub binis ellipseos diametris conjugatis eo majus evadit, quo magis ipsæ diametri accedunt ad eas, quæ inter se sunt æquales; utique datum rectangulum, nec minus esse debet eo, quod sub axibus AC, BC continetur, nec majus illo, quod conjugatæ æquales comprehendunt.

II. *Datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.* Fig. 49.

Jam, demissa super AB perpendiculari CF, rectangulum sub axibus AC, BC æquale est ei, quod fit ex AB in CF; quandoquidem triangula ABC, BCF inter se sunt æquiangula; adeoque AB est ad AC, ut BC ad CF. Et quoniam conjugatæ æquales sub eo circumferentiæ puncto reperiuntur, quod bifariam di-

vidit portionem CED; rectangulum, sub ipsis contentum, ob eandem rationem, erit æquale ei, quod fit ex AB in circuli radium. Quare datum rectangulum, nec minus esse debet eo, quod fit ex AB in CF, nec majus illo, quod fit ex AB in sui ipsius semissem.

Hinc, si datum rectangulum æquale ponatur ei, quod fit ex AB in rectam XZ; erit recta ista XZ major, quam CF, minor vero semisse ipsius AB. Quare, si ex puncto A erigatur super AB perpendicularis AP, æqualis ipsi XZ, & per punctum P ducatur recta PE, eidem AB parallela; hæc secabit portionem CED in puncto aliquo E. Jungantur rectæ AE, BE. Et rectæ istæ exhibebunt nobis diametros quæsitas. Nam, propter triangula æquiangula ABE, AEP, erit ut AB ad BE, ita AE ad AP, sive XZ: & propterea rectangulum sub ipsis AE, BE æquale erit rectangulo, quod fit ex AB in XZ.

III. *Datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam summam conficiant.*

III. Tertium problema in hunc modum concipitur: *datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam summam conficiant*. Sed istud problema facili negotio ad præcedens reducitur. Ubi enim data est summa diametrorum, dabitur etiam quadratum, quod fit ex summa illa, Sed quadratum istud est æquale quadratis diametrorum una cum rectangulo, bis sub ipsis diametris contento. Quare, quod constituunt quadrata ex diametris una cum rectangulo, bis sub eis comprehenso, illud utique datum erit.

Et quoniam, per superius ostensa, quadrata diametrorum simul sumpta datam summam con-

constituunt, nimirum eandem illam, quam exhibent quadrata axium; constituet quoque datam summam duplum rectanguli, quod sub ipsis diametris continetur. Quare datum erit rectangulum istud: & propterea propositum problema eo reducetur, ut datis axibus ellipsis, inveniantur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum contineant.

Quemadmodum autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant, oportet, ut rectangulum datum, nec sit minus eo, quod continetur sub axibus, nec majus illo, quod fit ex diametris conjugatis æqualibus; ita quoque, quum inveniendæ sunt duæ conjugatæ diametri, quæ simul datam rectam adæquent; per ea, quæ superius ostensa sunt, necesse est, ut recta data, nec summa axium sit minor, nec major summa conjugatarum æqualium.

IV. *Datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quarum differentia sit data.*

IV. Quartum problema hujusmodi erit: *datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quarum differentia sit data*. Sed hoc quoque problema facili negotio ad secundum revocabitur, si consideremus, quod per septimam secundi Elementorum quadratum ex differentia duarum conjugatarum diametrorum, una cum rectangulo, bis sub ipsis contento, æquale esse debeat quadratis earundem; atque adeo quadratis axium.

Hinc enim fit, ut siquidem ex summa quadratorum, quæ fiunt ex axibus, auferatur quadratum datæ differentiæ; id, quod superest, sit duplum rectanguli, quod quæsitæ dia-

metri continent. Unde, quum datum ſit reſiduum iſtud, dabitur etiam dimidium ejus, hoc eſt rectangulum, ſub quæſitis diametris contentum; & conſequenter eo res redit, ut inveniantur duæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant.

Cæterum, quum inveniendæ ſunt duæ diametri conjugatæ, quarum differentia ſit data; illud quidem requiritur, ut data iſta differentia non ſit major differentia axium. Nam, ex ſuperius oſtenſis, omnium diametrorum maxima quidem eſt axis major, minima vero axis minor. Quare omnino neceſſe eſt, ut differentia duarum conjugatarum diametrorum minor ſit differentia axium.

V.

Datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata differant a ſe mutuo per differentiam datam.

V. Quintum problema ita proponetur: *datis axibus ellipſis, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata differant a ſe mutuo per datam differentiam*. Ejus autem reſolutio nullam difficultatem involvit. Quum enim eadem quadrata ſimul æqualia eſſe debeant quadratis axium; utique data erit, tam ſumma, quam differentia eorum quadratorum.

Hinc, ſiquidem ad dimidium ſummæ addatur dimidium differentiæ, habebitur quadratum diametri majoris. Quod ſi autem ex dimidio ſummæ auferatur dimidium differentiæ, orietur quadratum diametri minoris. Quare diametrorum quadrata data etiam erunt ſeorſim; & conſequenter dabuntur quoque ipſæ diametri, quas oportet invenire.

Sicuti autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quarum differentia ſit data, neceſſe eſt, ut data iſta differentia non ſit

ma-

major differentia axium; ita quoque, quum invenire oportet, binas conjugatas diametros, quarum quadrata differant a se mutuo per datam differentiam, illud quidem requiritur, ut istiusmodi data differentia non sit major quadrato, quod fit ex differentia axium.

VI. Sextum problema hunc in modum efferemus: *datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum angulum contineant*. Sed facile erit, problema istud ad secundum revocare, in quo datis axibus ellipsis, quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant.

VI. *Datis axibus ellipsis, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum angulum contineant.*

Nam semper ac datus est angulus, quem quæsitæ diametri continent; data erit ratio, quam habet ejus sinus ad radium. Sed ratio ista est æqualis ei, quam habet rectangulum sub axibus ad id, quod sub ipsis diametris continetur. Quare etiam hæc alia ratio data erit: & propterea, quum datum sit rectangulum sub axibus; dabitur quoque rectangulum, quod continent quæsitæ diametri.

Quemadmodum autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant, necesse est, ut rectangulum datum non sit majus eo, quod sub conjugatis æqualibus continetur; ita, quum inveniendæ sunt duæ diametri conjugatæ, quæ datum angulum contineant, oportet, ut ratio sinus anguli dati ad radium non sit minor ea, quam habet rectangulum sub axibus ad id, quod conjugatæ æquales comprehendunt.

VII. In septimo problemate illud porro

VII. *Datis axibus ellipsis, invenire diametrum, qua datam parametrum habeat.*

quæremus, *qua ratione datis axibus ellipsis, invenire liceat diametrum, qua datam parametrum habeat*. Solvemus autem problema istud in hunc modum. Manentibus omnibus, ut supra, erigatur super AB perpendicularis BQ; quæ dimidium datæ parametri adæquet. Tum juncta AQ, describatur centro Q, intervalloque QB circuli circumferentia, cum qua ipsa AQ conveniat in punctis T, & V. Denique in angulo ABH applicetur recta AK, æqualis ipsi AV. Et erit AE diameter quæsita.

Fig. 49.

Jam enim eidem AB quadrato æquale est, tam rectangulum EAK, quam rectangulum TAV. Quare duo rectangula EAK, TAV æqualia erunt inter se: & propterea erit, ut AK ad AV, ita AT ad AE. Sed ex constructione duæ AK, AV sunt æquales inter se. Quare erunt pariter æquales duæ AE, AT; atque adeo etiam EK ipsi TV æqualis erit. Sed TV, velut dupla ipsius BQ, datam parametrum adæquat. Et igitur eidem parametro æqualis quoque erit ipsa EK; adeoque erit AE diameter, quam quærimus.

Constat autem, ex superius ostensis, parametrorum omnium ellipsis minimam quidem esse illam, quæ refertur ad axem majorem AC, maximam vero eam, quæ pertinet ad axem minorem AD. Quare, ut propositum problema resolvi possit, omnino necesse est, ut data parameter, nec minor sit parametro axis majoris, nec major parametro axis minoris.

VIII. *Datis axibus ellipsis, invenire*

VIII. Ad octavum problema quod attinet, quæremus in eo, *qua ratione datis axibus ellipsis, inveniri possit diameter, qua ad para-*

me-

metrum suam datam habeat rationem. Ejus vero solutionem facili negotio obtinebimus, si iisdem, ut supra, manentibus, secetur AB subinde quidem in G, ut AG ad BG sit in data illa ratione. Nam, erecta deinde perpendiculari GE ad circumferentiam usque, fiet AE diameter quæsita; quum sit, ut AE ad EK, ita AG ad BG. *Diametrum quæ ad parametrum suam datam habeat rationem.* Fig. 49.

Ex eo autem, quod diametrorum omnium ellipsis maxima quidem sit axis major, minima vero axis minor; parametrorum autem minima sit illa, quæ refertur ad axem majorem, maxima vero ea, quæ pertinet ad axem minorem; liquet, rationem cujusvis diametri ad suam parametrum, ea quidem, quam habet axis major ad parametrum suam, minorem esse; illa vero, quam habet axis minor ad suam parametrum majorem esse debere. Unde, nisi ratio data his terminis contineatur, problema erit solutu impossibile.

Idem problema potest etiam ad primum revocari. Nam, semper ac data est ratio, quam quæsita diameter habere debet ad suam parametrum; utique data erit pariter ratio, quam eadem quæsita diameter habebit ad suam conjugatam: quippe quæ illius est duplicata. Unde vicissim primum problema ad octavum istud poterit reduci: quærendo nempe diametrum, quæ ad suam parametrum habeat rationem subduplicatam ejus, quæ inter utramque diametrum esse debet.

IX. Nonum problema eo se vertet, ut *datis axibus ellipsis, inveniatur diameter quæ vel constituat datam summam cum sua pa-* IX. *Datis axibus ellipsis, invenire*

diametrum, quæ vel constituat datam summam cum sua parametro, vel differat ab eâ per datam differentiam.

FIG. 53. 54.

rametro, vel differat ab ea per datam differentiam. Et quantum ad priorem partem facili negotio resolvetur; quum satis sit in angulo ABH applicare rectam AK, quæ datam illam summam adæquet. Quantum vero ad partem alteram duo sunt casus distinguendi. Nam diameter quæsita, vel major esse debet sua parametro per datam illam differentiam, vel per contrarium minor.

In utroque autem casu resolvetur problema in hunc modum. Extendatur tangens BH ad partem alteram versus M: ita, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum juncta AM, erigatur super ea perpendicularis MN, æqualis dimidio datæ differentiæ. Describatur deinde centro N, intervalloque NM circuli circumferentia MOR, cum qua conveniat recta AN in punctis O, & R. Jamque, si in angulo ABH applicetur recta AK, æqualis ipsi AO in primo casu, & ipsi AR in secundo; fiet AE diameter quæsita.

Quum enim AM quadratum duplum sit quadrati ex AB, sitque etiam rectangulum OAR æquale quadrato ex AM, & rectangulum EAK æquale quadrato ex AB; erit rectangulum OAR duplum pariter rectanguli EAK. Unde, secta AO bifariam in puncto S, erit, tam rectangulum ex AO in SN, quam rectangulum ex AS in AR æquale rectangulo EAK: & propterea erit, non modo, ut AO ad AK, ita AE ad SN; verum etiam, ut AR ad AK, ita AE ad AS.

FIG. 53. Hinc, quum in primo casu duæ AK, AO sint æquales inter se, erunt etiam æquales duæ

AE,

AE + SN: proindeque, si fiat AT, æqualis ipsi ON: adeo nempe, ut sit TN æqualis ipsi AO, seu AK; erit reliqua TS æqualis reliquæ EK. Sed, ob æquales NR, AT, duæ NR, TS sunt æquales ipsi AS, vel SO; atque adeo, apposita communi ON, etiam duæ OR, TS adæquant totam SN. Quare, sicuti SN superat TS per rectam OR, quæ, velut dupla ipsius MN, adæquat datam differentiam; ita quoque diameter AE superabit parametrum suam EK per differentiam datam.

In secundo vero casu, quum sint æquales duæ AK, AR; erunt etiam æquales duæ AE, AS: proindeque reliqua EK reliquæ SR pariter æqualis erit. Sed SR superat AS, vel SO per rectam OR, quæ, velut dupla ipsius MN, est æqualis datæ differentiæ. Quare etiam parameter EK superabit diametrum AE, ad quam ipsa refertur, per differentiam datam. Fig. 54.

Cæterum per ea, quæ superius ostensa sunt, sicuti data summa, quam constituere debet diameter cum sua parametro, minor sit oportet summa ex lateribus figuræ axis minoris, major vero summa ex lateribus figuræ axis majoris; ita etiam data illa differentia, per quam diameter a sua parametro differre debet, in primo casu necesse est, ut sit minor differentia laterum figuræ axis minoris, in secundo vero casu minor differentia laterum figuræ axis majoris.

X. Decimum problema illud ostendet, *qua ratione, datis axibus ellipsis, invenire liceat diametrum, cujus parameter cum summa ex lateribus figuræ datum rectangulum contineat.*

X. *Datis axibus ellipsis, invenire diametrum, cujus para-*

Ejus

metur cum summa ex lateribus figura datum rectangulum contineat.

Fig. 49.

Ejus vero solutionem protinus obtinebimus, si utique ex tangente BH abscindamus portionem BK, cujus quadratum datum illud rectangulum adæquet. Nam, juncta AK, fiet AE diameter quæsita.

Quum enim diametri AE parameter quidem sit EK, summa vero ex lateribus figuræ sit AK; erit AKE rectangulum, quod fit ex parametro ejus in summam laterum suæ figuræ. Sed rectangulum AKE est æquale quadrato ipsius BK. Unde, sicuti BK quadratum, ex constructione, datum rectangulum adæquat; ita quoque eidem dato rectangulo æquale erit rectangulum AKE.

Patet autem, quod, ut problema istud resolvi possit, omnino necesse sit, ut datum rectangulum sit majus eo, quod fit ex parametro axis majoris in summam laterum suæ figuræ, & minus illo, quod parameter axis minoris continet cum summa laterum suæ figuræ. Nam vidimus superius, tam parametrum, quam summam laterum figuræ eo magis augeri, quo magis diameter ad axem minorem accedit.

Hoc idem problema poterat etiam ad præcedens revocari. Quum enim datum sit rectangulum, quod fit ex parametro in summam laterum figuræ; si ei addamus rectangulum aliud, similiter datum, quod fit ex diametro in eandem illam summam, dabitur quoque quadratum ex figuræ lateribus simul sumptis; & consequenter ipsa laterum summa etiam data erit. Unde eo res redit, ut quæramus diametrum, quæ cum sua parametro da-

tam

tam summam constituat.

XI. In undecimo problemate ostendemus, quo pacto, *datis axibus ellipsis, inveniri possit diameter, cujus quadratum differat a quadrato parametri per datam differentiam*. Atque hic duo sunt casus distinguendi. Primus est, quum quadratum diametri majus esse debet quadrato parametri. Alter, quum vicissim debet esse minus. In primo casu data differentia minor sit oportet differentia quadratorum, quæ fiunt ex lateribus figuræ axis majoris. In secundo vero casu debet esse minor differentia quadratorum ex lateribus figuræ axis minoris.

XI. *Datis axibus ellipsis, invenire diametrum, cujus quadratum differat à quadrato parametri per datam differentiam.*

Quantum ad priorem casum solvetur problema in hunc modum. Extendatur tangens BH ad partem alteram versus M: ita, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum juncta AM, describatur super ea, velut diametro, semicirculus ANM, in quo applicetur recta MN talis longitudinis, ut quadratum ejus datam differentiam adæquet. Jungatur deinde AN. Jamque, si in angulo ABH applicemus rectam AK, æqualem ipsi AN; erit AE diameter quæsita. FIG. 55.

Quum enim AK sit æqualis ipsi AN, erunt quadrata duo AK, MN æqualia quadrato ex AM. Sed quadratum ex AM, velut duplum quadrati, quod fit ex AB, est æquale duplo rectanguli EAK. Quare quadrata duo AK, MN duplo rectanguli EAK pariter æqualia erunt: & consequenter, apposito communi quadrato ex EK, erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duplo rectanguli EAK una cum EK quadrato.

Jam duplum rectanguli EAK una cum EK quadrato est æquale duobus quadratis AK, AE. Quare erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duobus quadratis AK, AE, adeoque, dempto communi quadrato ex AK, remanebunt quadrata duo MN, EK æqualia quadrato ex AE. Unde quadratum diametri AE superabit quadratum suæ parametri EK per MN quadratum, quod ex constructione datam differentiam adæquat.

FIG. 56. Quantum ad secundum casum, solutio problematis fiet hoc pacto. Extendatur rursus tangens BH ad partem alteram versus M: ita, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum, juncta AM, erigatur super ea perpendicularis MN talis longitudinis, ut quadratum ejus datam differentiam adæquet. Jungatur deinde AN. Jamque, si in angulo ABH applicemus rectam AK æqualem ipsi AN; erit AE diameter quæsita.

Quum enim AM quadratum sit æquale duplo quadrati ex AB, sive etiam duplo rectanguli EAK: apposito communi quadrato ex MN; erit AN, sive AK quadratum æquale duplo rectanguli EAK una cum MN quadrato: & propterea, addito rursus communi quadrato ex AE; erunt duo quadrata AK, AE æqualia duplo rectanguli EAK una cum duobus quadratis AE, MN.

Et quoniam duo quadrata AK, AE sunt æqualia quoque duplo rectanguli EAK una cum EK quadrato; erit EK quadratum æquale duobus quadratis AE, MN. Unde quadratum diametri AE superabitur a quadrato

suæ

ctiae parametri EK per MN quadratum, quod ex constructione datam differentiam adaequat.

XII. In ultimo problemate docebimus, *quomodo, datis axibus ellipsis, inveniri possit diameter talis, ut data sit summa quadratorum, quae fiunt ex lateribus suae figurae*. Hunc in finem, manentibus omnibus, ut supra, ponamus rectam PQ esse ejus longitudinis, ut duplum rectanguli ex AB in PQ datam illam summam exhibeat. Tum, descripta super ea circuli portione PSQ, quae suscipiat angulum semirectum, erigatur perpendicularis PT, aequalis dimidio ipsius AB. Et per punctum T ducatur recta TS, eidem PQ parallela, quae circuli portionem secet in S. XII. *Datis axibus ellipsis, invenire diametrum, in qua data sit summa quadratorum, quae fiunt ex lateribus suae figurae.* FIG. 57

Sit deinde E punctum, quod bisecat portionem CED. Et quoniam, demisso perpendiculo EG, fiunt duae EG, PT aequales inter se; poterit triangulum PSQ ita quidem aptari super AB, ut punctum S cadat in E. Aptetur itaque triangulum illud super AB ea lege, sitque OER. Erigatur porro perpendicularis ON. Et juncta AN, dabit ista diametrum quaesitam.

Extendatur enim AN usque donec tangenti BH occurrat in M. Et quoniam angulus OER, velut aequalis angulo PSQ, est aequalis angulo BAE; per ea, quae ostensa sunt in calce capitis praecedentis, erit summa quadratorum AN, NM aequalis duplo rectanguli, quod fit ex AB in OR. Sed ex constructione OR est aequalis ipsi PQ. Quare eadem summa quadratorum AN, NM aequalis erit du-

duplo rectanguli, quod fit ex AB in PQ; atque adeo data erit.

Non esse autem problema istud continuo solutionis capax; jam abunde patet ex iis, quæ in fine capitis præcedentis ostensa sunt. Sed exinde facili quoque negotio intelligere licet, quid utique requiratur, quo possit problema resolvi. Unde, ne diutius in eo explicando hæreamus, sufficiat illud indicasse, & ad alia progrediamur.

XIII. *Datis axibus ellipsis, definire in ordine ad eos positionem cujusvis diametri data.* FIG. 58.

XIII. Apollonius in solutione horum problematum aliam methodum paulo difficiliorem usurpavit. Sed ea mediante exhibuit quoque positionem diametri relate ad datos axes ellipsis. Unde, ne ex hoc capite methodus a nobis adhibita manca existimetur; ostendemus modo, *qua ratione datis axibus ellipsis, definiri possit relate ad eos positio cujusvis diametri datæ.*

Sint itaque AB, KL axes ellipsis, hoc est AB axis major, & KL axis minor. Sit autem EF aliqua ejusdem ellipsis diameter data. Jam innotescet diametri hujus positio, si demissa ad axem majorem AB ordinata EG, nota sit longitudo portionis CG. Unde, eo res redit, ut inquiramus quo pacto ipsius CG longitudo possit definiri.

Et sane, propter ellipsim, CA quadratum est ad CK quadratum, ut rectangulum AGB ad EG quadratum. Sed EG quadratum æquale est differentiæ quadratorum CE, CG, & rectangulum AGB æquale est differentiæ quadratorum CA, CG. Itaque erit, ut CA quadratum ad CK quadratum, ita differentia

qua-

quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CE, CG.

Hinc, quum convertendo sit, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CK, ita differentia quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CA, CE: erit, permutando, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CG, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CA, CE. Unde, rursus convertendo, erit, ut CA quadratum ad CG quadratnm, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CE, CK.

Describantur jam super ipsis CA, CE semicirculi AMC, ENC; & aptentur in iis rectæ CM, CN, quarum utraque sit æqualis ipsi CK. Jamque, junctis rectis AM, EN; erit AM quadratum æquale differentiæ quadratorum CA, CK; & EN quadratum æquale differentiæ quadratorum CE, CK. Unde erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita AM quadratum ad EN quadratum: & propterea, quum proportionales sint quatuor rectæ AM, EN, CA, CG; invenietur CG, si fiat, ut AM ad EN, ita CA ad ipsam CG.

XIV. Ne aliquid hic omittamus, ostendemus denique, *qua ratione in ipsa ellipsi, data parametro unius diametri, inveniri possit parameter cujusvis alterius diametri*. Sint igitur AB, EF duæ quævis diametri ellipsis AEF. Et data parametro unius diametri AB, oporteat, invenire parametrum alterius diametri EF.

XIV. *In ellipsi, data parametro unius diametri, invenire parametrum cujusvis alterius diametri.*

FIG. 59.

Sit AD parameter diametri AB, quæ cum

cum ipsa AB ponatur in directum. Tum, secta AD bifariam in puncto M, describatur per tria puncta A, E, M circulus AEM, occurrens ipsi EF productæ in puncto N. Extendatur porro EN usque ad punctum H: ita, ut sit EH dupla ipsius EN. Et erit EH parameter diametri EF.

Est enim, propter circulum, rectangulum ACM æquale rectangulo ECN. Sed rectangulum ABD est quadruplum rectanguli ACM, & rectangulum EFH est quadruplum rectanguli ACM, & rectangulum EFH est quadruplum rectanguli ECN. Quare duo rectangula ABD, EFH etiam æqualia erunt: & propterea erit, ut diameter EF ad diametrum AB, ita BD ad FH.

Jam per ea, quæ superius ostensa sunt, diametri EF, AB sunt reciproce proportionales summis laterum suarum figurarum. Quare erit ex æquali, ut BD ad FH, ita summa laterum figuræ diametri AB ad summam laterum figuræ diametri EF: & propterea, quemadmodum prior summa est æqualis ipsi BD; ita quoque summa posterior æqualis erit ipsi FH. Unde erit EH parameter diametri EF.

CAP.

CAP. III.

Hyperbolæ diametri omnes inter se mutuo comparantur.

I. Constat, ex superius ostensis, in qualibet hyperbola extare diametrum unam, quæ cum suis ordinatis rectos angulos constituat. Diametrum istam vocavimus axem ipsius hyperbolæ. Et facile erit ostendere, *omnium hyperbolæ diametrorum minimam esse illam, quæ axis appellatur.* I. *Omnium hyperbolæ diametrorum minima quidem est axis.* FIG. 40.

Sit enim AB axis hyperbolarum oppositarum, sitque EF alia quævis diameter earundem. Dico, diametrum istam EF majorem esse axe AB.

Demittatur siquidem ad axem AB ordinata EG. Et quia ista cadit infra verticem A; erit portio CG major semiaxe CA. Sed, ob angulum rectum CGE, semidiameter CE major est portione CG. Quare eadem semidiameter CE multo major erit semiaxe CA: & propterea diameter tota EF major erit axe integro AB.

II. Nullo itidem negotio ostendi potest, quod *omnium aliarum diametrorum illa quidem sit minor, quæ minus distat ab axe.* II. *Aliarum autem illa minor est, quæ minus distat ab axe.*

Manentibus namque omnibus, ut supra, perspicuum est, CE quadratum æquale esse duobus quadratis CG, EG. Sed CG quadratum est æquale CA quadrato una cum re- FIG. 40.

ctangulo AGB. Quare erit idem CE quadratum æquale duobus quadratis CA, EG una cum rectangulo AGB.

Id quum ita sit, liquet, excessum, quo CE quadratum superat CA quadratum, esse EG quadratum una cum rectangulo AGB. Sed, tam EG quadratum, quam rectangulum AGB, eo quidem fit minus, quo magis punctum E accedit ad punctum A. Itaque excessus, quo CE quadratum superat CA quadratum, eo etiam minor erit, quo minus distant a se invicem puncta duo A, & E.

Minuitur ergo CE quadratum, dum punctum E accedit ad punctum A. Unde ipsa CE etiam diminutionem patitur. Est autem diameter EF dupla ipsius CE. Quare minuetur quoque diameter EF; & propterea omnium aliarum diametrorum hyperbolæ illa quidem minor erit, quæ minus distat ab axe.

III. *Conjugatæ diametri per ordinatas, super iis ductas ex verticibus aliarum, dividuntur in eadem ratione.* Fig. 40.

III. Hyperbolæ igitur diametri in recessu ab axe majores evadunt. Sed, iis crescentibus, augentur etiam ipsarum conjugatæ. Quod ut liquido constet, ostendendum est prius sequens theorema.

Nimirum, quod *si capiantur in hyperbola binæ quævis conjugatæ diametri, eæ dividantur in eadem ratione ab ordinatis, quæ super iis demittuntur ex verticibus duarum quarumvis aliarum similiter conjugatarum diametrorum.*

Neque vero difficile erit, theorema istud ostendere, si eorum recordemur, quæ superius ostensa sunt. Capiantur enim in hyperbola duæ quævis conjugatæ diametri AB, KL. Demittantur ad eas ordinatæ EG, PQ ex verti-

ci-

cibus duarum quarumvis aliarum similiter conjugatarum diametrorum EF, PR. Dico, fore, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

Ducatur siquidem ad diametrum EF ordinata AO. Tum per punctum O agatur recta OS, ipsi EG parallela. Et jam CK ad CQ rationem habebit compositam ex CK ad CP, & ex CP ad CQ. Sed CK est ad CP, ut KL ad PR, sive etiam, ut EG ad AO; itemque CP est ad CQ, ut AO ad OS. Itaque erit CK ad CQ in ratione composita ex EG ad AO, & ex AO ad OS.

Et quoniam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EG ad OS, sive etiam CE ad CO; erit ex æquali, ut CK ad CQ, ita CE ad CO; & subducendo, antecedentes ex consequentibus, erit quoque ut CK ad KQ, ita CE ad EO. Sed, sumptis antecedentium duplis, KL est ad KQ, ut EF ad EO. Quare, componendo, erit, ut LQ ad KQ, ita FO ad EO: & propterea, quum FO sit ad EO, ut est BG ad AG; erit rursus ex æquali, ut BG ad AG, ita LQ ad KQ.

IV. Ex isto autem theoremate *prono alveo fluit*, quadratum quidem ordinatæ EG esse æquale rectangulo KQL; quadratum vero ordinatæ PQ æquale esse rectangulo AGB.

IV. *Praecedentis proprietatis elegans consectarium, respiciens quadrata earum ordinatarum.*

Fig. 40.

Quum enim BG sit ad AG, ut est LQ ad KQ; erit dividendo, ut AB ad AG, ita KL ad KQ. Unde, quia permutando AB est ad KL, tam ut AG ad KQ, quam ut BG ad LQ; compositis rationibus, erit, ut AB quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum AGB ad rectangulum KQL.

Jam, propter hyperbolam, AB quadratum est ad KL quadratum, tam ut rectangulum AGB ad EG quadratum, quam ut PQ quadratum ad rectangulum KQL. Quare ex æquali, primo quidem erit, ut rectangulum AGB ad rectangulum KQL, ita idem rectangulum AGB ad EG quadratum. Deinde vero, ut rectangulum AGB ad rectangulum KQL, ita PQ quadratum ad idem rectangulum KQL: & propterea rectangulo quidem KQL æquale erit EG quadratum; rectangulo vero AGB erit æquale PQ quadratum.

V.
Aliud ejusdem proprietatatis consectarium, etiam notatu dignum.
FIG. 40.

V. Supponamus modo AB, KL esse axes conjugatos hyperbolæ; adeo nempe, ut ordinatæ EG, PQ rectos angulos cum iis constituant. Et *nullo etiam negotio ostendemus*, differentiam quadratorum EF, AB æqualem esse differentiæ quadratorum PR, KL.

Ut enim vidimus paulo ante, excessus, quo CE quadratum superat CA quadratum, est EG quadratum una cum rectangulo AGB. Sed rectangulo AGB ostensum est æquale PQ quadratum. Quare excessus, quo CE quadratum superat CA quadratum, erit summa quadratorum EG, PQ.

Eadem ratione excessus, quo CP quadratum superat CK quadratum, est PQ quadratum una cum rectangulo KQL. Sed rectangulo KQL ostensum est æquale EG quadratum. Quare excessus, quo CP quadratum superat CK quadratum, erit pariter summa quadratorum EG, PQ.

Id quum ita sit, erit differentia quadratorum CE, CA æqualis differentiæ quadratorum

rum

rum CP, CK. Sed ipsarum CE, CA, CP, CK duplæ sunt EF, AB, PR, KL. Quare differentia quadratorum EF, AB differentiæ quadratorum PR, KL etiam æqualis erit.

VI. Atque hinc modo facile erit ostendere id, quod ab initio nobis proposuimus: nimirum, quod, *crescentibus hyperbolæ diametris primariis, augeri debeant quoque ipsarum conjugatæ.* VI. *Crescentibus diametris primariis, augentur etiam ipsarum conjugatæ.*

Maneant enim omnia, ut supra: adeo nempe, ut AB sit axis hyperbolæ, KL ejus conjugatus; EF diameter quævis primaria, & PR ipsius conjugata. Dico, non posse diametrum EF majorem fieri, nisi etiam augeatur ejus conjugata PR. Fig. 40.

Ostensum est namque, excessum, quo EF quadratum superat AB quadratum, esse æqualem excessui, quo PR quadratum superat KL quadratum. Quare nequit augeri prior excessus, nisi etiam excessus secundus major evadat.

Jam, ubi per recessum ab axe AB major evadit diameter EF, tunc augetur excessus, quo EF quadratum superat AB quadratum. Itaque in eodem recessu necesse est, ut augeatur etiam excessus, quo PR quadratum superat KL quadratum: & propterea ipsa PR major itidem evadet.

VII. Sed ex eo, quod differentia quadratorum EF, AB sit æqualis differentiæ quadratorum PR, KL, *colligi alterius potest*, diametrum EF esse æqualem, majorem, vel minorem conjugata sua PR, prout axis AB est æqualis, major, vel minor conjugato suo KL. VII. *Quomodo sit qualibet ex diametris primariis relate ad suam conjugatam.* Fig. 40.

Ponamus etenim primo, axem AB æqualem esse conjugato suo KL. Dico, etiam diametrum EF adæquare conjugatam suam PR. Nam si major, vel minor esset; foret differentia quadratorum EF, AB major quoque, vel minor differentia quadratorum PR, KL. Quod plane repugnat.

Ponamus secundo, axem AB majorem esse conjugato suo KL. Dico, etiam diametrum EF majorem esse conjugata sua PR. Nam, si æqualis, vel minor esset; foret differentia quadratorum EF, AB minor differentia quadratorum PR, KL. Quod quidem est falsum.

Ponamus denique, axem AB minorem esse conjugato suo KL. Dico, etiam diametrum EF minorem esse conjugata sua PR. Nam, si æqualis, vel major esset; foret differentia quadratorum EF, AB major differentia quadratorum PR, KL; quum tamen ei æqualis esse debeat.

VIII. *Locus omnium diametrorum hyperbolæ potest per datæ cujusdam rectæ portionem exhiberi.* FIG. 60

VIII. Cæterum, ut alia quamplurima, quæ locum habent in comparatione diametrorum hyperbolæ, tum hic, cum in sequentibus facilius prosequi valeamus; juvat hic advertere, quod *locus diametrorum omnium hyperbolæ per datæ alicujus rectæ portionem possit exhiberi*.

In triangulo namque ABC, rectangulo in B, referat hypothenusa AC eum ex duobus axibus conjugatis hyperbolæ, qui major est; & latus BC axem alterum minorem. Extendatur porro latus istud BC in directum versus X. Et dico, portionem ejus CX considе-

siderari posse veluti locum omnium diametrorum hyperbolæ.

Primo enim, ex superius ostensis, quælibet diameter, quæ ad eas hyperbolas terminatur, in quibus suos terminos habet axis AC, debet esse major ipso axe AC. Sed omnes rectæ, quæ ducuntur ex puncto A ad rectam CX, majores sunt ipsa AC. Itaque poterunt rectæ istæ omnes earum hyperbolarum diametros exhibere.

Deinde, si AE sit aliqua earum diametrorum, ejus conjugata talis esse debet, ut excessus, quo ipsius quadratum superat BC quadratum, sit æqualis excessui, quo AE quadratum superat AC quadratum. Unde facile erit ostendere, quod debeat esse BE conjugata ipsius AE.

Est enim BE quadratum æquale BC, CE quadratis una cum duplo rectanguli BCE. Quare excessus, quo BE quadratum superat BC quadratum, erit CE quadratum una cum duplo rectanguli BCE. Sed hujusmodi est etiam excessus, quo AE quadratum superat AC quadratum. Itaque differentia quadratorum BE, BC æqualis erit differentiæ quadratorum AE, AC: & propterea, sicuti BC est conjugatus axis AC, sic erit BE conjugata diametri AE.

IX. Hoc jacto principio, jam circa diametros conjugatas hyperbolæ plura alia facillime licebit ostendere. Ac primo quidem ostendemus, quod *differentia quadratorum, quæ fi-* *ex axibus conjugatis, æqualis sit diff[erentiæ]* *quadratorum, quæ fiunt ex aliis d[ia]me-* IX. *Differentia quadratorum ex axibus conjugatis, æqualis differentia quadratorum ex aliis binis*

diametris conjugatis. *metris similiter conjugatis.*

Fig.60. Ut enim rectæ AC, BC referunt axes hyperbolæ conjugatos, sic rectæ AE, BE referant binas ejus diametros similiter conjugatas. Dico, differentiam quadratorum AC, BC æqualem esse differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex ipsis AE, BE.

Ob triangulum namque ABC, rectangulum in B, est AC quadratum æquale duobus quadratis AB, BC. Quare differentia quadratorum AC, BC æqualis erit quadrato, quod fit ex AB.

Simili ratione, ob triangulum ABE, rectangulum in B, est AE quadratum æquale duobus quadratis AB, BE. Quare differentia quadratorum AE, BE æqualis erit quadrato, quod fit ex AB.

Eidem igitur AB quadrato æqualis est, tam differentia quadratorum AC, BC, quam differentia quadratorum AE, BE. Quare differentia quadratorum AC, BC æqualis erit differentiæ quadratorum AE, BE.

X. Theorema primum de ratione, quam habet diameter primaria ad suam conjugatam.

X. Ostendemus deinde, quod *quum axis hyperbolæ major est suo conjugato, non modo omnis alia diameter major erit conjugata sua, sed etiam ratio axis ad suum conjugatum major erit ratione, quam quævis alia diameter habet ad conjugatam suam.*

Fig.60. Jam enim clare patet, quod sicuti axis AC major est conjugato suo BC, ita quævis alia diameter AE major sit quoque conjugata sua BE. Sed facile erit etiam ostendere, quod AC ad BC majorem rationem habeat, quam AE ad BE.

Du-

Ducta siquidem per punctum E recta EF, ipsi AC parallela, quæ conveniat cum AB in F; erit, ut AC ad BC, ita FE ad BE. Sed, ob angulum rectum EBF, FE major est, quam AE; atque adeo FE ad BE majorem rationem habet, quam AE ad BE. Quare etiam AC ad BC majorem rationem habebit, quam AE ad BE.

Simili autem ratione ostendemus, quod si fuerit AG quævis alia hyperbolæ diameter, remotior ab axe AC; ratio, quam habet diameter AE, axi propinquior, ad suam conjugatam BE, major sit ratione, quam habet diameter AG, ab axe remotior, ad conjugatam suam BG.

XI. *Theorema secundum de eadem ratione, quam habet diameter primaria ad suam conjugatam.*

XI. Ostendemus porro, quod *quum per contrarium axis hyperbolæ minor est suo conjugato, tunc non solum omnis alia diameter minor erit conjugata sua, sed etiam ratio axis ad suum conjugatum minor erit ratione, quam quævis alia diameter habet ad conjugatam suam.*

FIG. 60.

Jam enim liquido patet, quod sicuti axis BC minor est suo conjugato AC, ita quævis alia diameter BE minor sit quoque conjugata sua AE. Sed nullo etiam negotio ostendemus, quod BC ad AC minorem rationem habeat, quam BE ad AE.

Ducta siquidem per punctum E recta EF, ipsi AC parallela, quæ conveniat cum AB in puncto F; erit, ut BC ad AC, ita BE ad FE. Sed, ob angulum rectum EBF, FE major est, quam AE; atque adeo BE ad FE minorem rationem habet, quam BE ad AE.

Qua-

Quare etiam BC ad AC minorem rationem habebit, quam BE ad AE.

Simili autem ratione ostendemus, quod si fuerit BG, quævis alia hyperbolæ diameter, remotior ab axe BC; ratio, quam habet diameter BE, axi propinquior, ad suam conjugatam AE, minor sit ratione, quam habet diameter BG, ab axe remotior, ad conjugatam suam AG.

XII. *Theoremata de summa, rectangulo, & differentia duarum hyperbolæ conjugatarum diametrorum.*

XII. Ulterius ex eo, quod crescentibus hyperbolæ diametris, augeantur etiam ipsarum conjugatæ, ultro sequitur, *tam summam, quam rectangulum ex duabus hyperbolæ diametris conjugatis, eo magis augeri, quo magis ipsæ diametri ab axibus recedunt.*

Sed quantum attinet *ad differentiam earundem diametrorum, ea per contrarium eo minor evadit, quo magis diametri ab axibus removentur; tandemque in infinita distantia differentia illa prorsus evanescit, & ipsæ diametri fiunt inter se mutuo æquales.*

FIG. 60. Manentibus namque omnibus, ut supra, extendatur CB usque in H, ut fiat AC æqualis ipsi CH. Jamque, si ostendi possit, AE minorem esse, quam EH; erit differentia axium AC, BC major differentia diametrorum AE, BE. Id vero ostendemus in hunc modum.

Jungatur AH. Et quoniam duæ AC, CH sunt æquales inter se; erit angulus CAH æqualis pariter angulo CHA. Sed angulus EAH major est angulo CAH. Quare idem angulus EAH erit etiam major angulo EHA: & propterea AE minor erit, quam EH.

Simili ratione ostendemus, differentiam

dia-

diametrorum AE, BE, axibus propinquiorum, majorem esse differentia diametrorum AG, BG, ab iisdem axibus remotiorum. Quare differentia inter binas hyperbolæ diametros conjugatas eo minor evadet, quo magis ipsæ diametri ab axibus removentur.

XIII. Nolim autem hoc loco reticere, quod etsi rectangulum ex binis hyperbolæ diametris conjugatis eo majus evadat, quo magis ipsæ diametri ab axibus removentur, atque adeo ad æqualitatem accedunt; attamen *parallelogrammum, circa binas hyperbolæ conjugatas diametros descriptum, sit ejusdem ubique magnitudinis, hoc est æquale semper rectangulo, quod sub ipsis axibus continetur.*

XIII. *Parallelogrammum, circa duas hyperbolæ conjugatas diametros descriptum, est æquale rectangulo sub axibus* Fig. 61.

Sint enim AB, KL axes hyperbolæ conjugati; sintque etiam EF, PR binæ ejus conjugatæ diametri. Ducantur per puncta E, & F rectæ QS, TV, ipsi PR parallelæ; tum item per puncta P, & R rectæ QV, TS, æquidistantes ipsi EF: ita, ut circa diametros conjugatas EF, PR descriptum sit parallelogrammum QSTV. Dico, parallelogrammum istud æquale esse rectangulo, quod sub axibus AB, KL continetur.

Demittatur, tum ad axem AB ordinata EG, cum ad diametrum EF ordinata AO. Et, ex superius ostensis, erit, ut EG ad AO, ita KL ad PR; sive etiam, ita CK ad CP. Sed, demissis super CE, CP perpendicularibus AI, EH, EG est ad AO in ratione composita ex EG ad AI, & ex AI ad AO; hoc est in ratione composita ex CE ad CA, & ex EH ad CE. Quare etiam CK ad CP rationem habebit composi-

tam

tam ex EH ad CE, & ex CE ad CA.

Jam duæ istæ rationes componunt pariter rationem, quam habet EH ad CA. Quare erit ex æquali, ut CK ad CP, ita EH ad CA; & propterea rectangulum ex CP in EH, hoc est parallelogrammum PCEQ, erit æquale rectangulo, quod fit ex CA in CK. Sed parallelogrammum QSTV est quadruplum parallelogrammi PCEQ, & rectangulum sub axibus AB, KL est quadruplum rectanguli ACK. Quare etiam parallelogrammum QSTV æquale erit rectangulo sub axibus AB, KL.

XIV. *Theoremata ex angulis, quos conjugatæ diametri in hyperbola centro constituunt.*

XIV. Hinc vero plura deducuntur *circa angulos, quos hyperbolæ conjugatæ diametri occursu mutuo in centro constituunt.*

Nimirum primo, quod *sinus anguli, sub duabus quibuslibet conjugatis diametris contenti, sit ad radium, ut est rectangulum sub axibus ad id, quod sub ipsis diametris continetur.*

Fig. 61. Positis enim omnibus, ut supra, sinus anguli ECP est ad radium, ut EH ad CE; sive etiam, ut rectangulum ex CP in EH ad rectangulum ex CP in CE. Sed rectangulum ex CP in EH ostensum est æquale rectangulo ACK: quod quidem est ad rectangulum ex CP in CE, ut rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR. Quare erit ex æquali, ut sinus anguli ECP ad radium, ita rectangulum ex AB in KL ad rectangulum ex EF in PR.

Secundo, quod *sinus angulorum, quos conjugatæ diametri occursu mutuo in centro constituunt, sint reciproce, ut rectangula, quæ*

fiunt ex ipsis diametris conjugatis.

Jam enim ostensum est, quod sinus anguli, quem duæ quævis conjugatæ diametri continent, sit ad radium, ut est rectangulum sub axibus ad id, quod sub ipsis diametris continetur. Quare, ex æquo perturbando, sinus anguli duarum conjugatarum erit ad sinum anguli, quem aliæ duæ conjugatæ comprehendunt, ut est rectangulum istarum ad id, quod ex iis efficitur.

Denique, quod *angulus acutus, sub binis hyperbolæ diametris conjugatis comprehensus, eo minor evadat, quo magis ipsæ diametri ab axibus removentur.*

Nam, ex superius ostensis, rectangulum, quod binæ hyperbolæ conjugatæ diametri continent, eo majus evadit, quo magis eæ diametri ab axibus recedunt. Sed ei rectangulo est reciproce proportionalis sinus anguli, sub iisdem diametris contenti. Quare per contrarium, tam sinus, quam ipse angulus acutus, ad quem sinus refertur, necesse est, ut eo minor fiat, quo magis conjugatæ diametri ab axibus removentur.

CAP. V.

Parametri diametrorum hyperbolæ inter se mutuo conferuntur.

I. COmparatis inter se mutuo diametris hyperbolæ, sequitur, ut parame- I. *Duæ hyperbolæ diame-*
tros

tri conjugatæ sunt continue proportionales cum suis parametris, ubi inverso ordine inter eas collocantur.

FIG. 62.

tros ipsarum ad invicem conferamus. Et primo quidem, *quum conjugatæ fuerint eæ diametri, quarum parametros simul conferre oportet, facile erit, de iis parametris dijudicare.*

In parametris enim, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur, istud obtinet theorema, quod *ipsæ diametri continuam cum eis proportionem constituant, ubi inverso ordine inter illas collocantur.*

Sint enim hyperbolæ AB, KL binæ ejus diametri conjugatæ. Sit autem AD parameter unius AB, & KI parameter alterius KL. Dico, diametros AB, KL, inverso ordine positas inter suas parametros AD, KI, continuam cum eis proportionem constituere.

Quoniam enim KL est conjugata ipsius AB; erit, ut AD ad KL, ita KL ad AB. Et similiter, quoniam AB est conjugata ipsius KL; erit ut KL ad AB, ita AB ad KI. Quare quatuor AD, KL, AB, KI continue proportionales erunt.

II. *Comparatio parametrorum, quæ ad duas hyperbolæ diametros conjugatas referuntur.*

FIG. 62.

II. Hinc autem *plura deducuntur circa parametros, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur.*

Nimirum primo, quod si duæ conjugatæ diametri AB, KL inter se sint æquales; etiam parametri AD, KI debeant esse æquales, tam inter se, quam cum diametris suis.

Secundo, quod si vicissim duæ conjugatæ diametri AB, KL sint inæquales; parametri quoque AD, KI debeant esse inæquales, tam inter se, quam cum qualibet earum diametrorum.

Tertio, quod ex diametris AB, KL ea,

quæ

quæ major eſt, habeat parametrum, tum ipſa, cum diametro altera minorem; illa vero, quæ minor eſt, parametrum habeat, etiam altera diametro majorem.

Quarto, quod quum inæquales ſunt diametri AB, KL, & inæquales adeo ipſarum parametri AD, KI; ſumma parametrorum major ſit ſemper ſumma diametrorum.

Et denique, quod ſi capiatur differentia, tam inter diametrum AB, & parametrum ſuam AD, quam inter diametrum KL, & ſuam parametrum KI; ea quidem differentia ſit major, quæ ad minorem diametrum, majoremque adeo parametrum refertur.

III. Ubi autem diametri non fuerint conjugatæ, ſed ad eaſdem hyperbolas terminatur, poterit de parametris ipſarum judicium ferri, oſtenſo prius hoc theoremate, quod *differentia inter quadratum alicujus diametri, & figuram ejus ſit eadem ubique.* III. *In hyperbola differentia inter quadratum diametri, & ejus figuram eſt eadem ubique.*

Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, quod differentia inter quadratum diametri AB, & figuram ejus, quæ conſtituitur per rectangulum DAB, ſit ſemper eadem, quocumque in loco capiatur diameter AB. FIG. 62.

Ex ſuperius ſiquidem oſtenſis, differentia quadratorum, quæ fiunt ex diametris conjugatis AB, KL, ubique reperitur æqualis differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex axibus; & conſequenter ubique eſt eadem. Sed quadratum ex KL eſt æquale rectangulo DAB. Quare eadem pariter ubique erit differentia inter AB quadratum, & rectangulum DAB.

IV. *Duæ hyperbolæ diametri sunt reciproce proportionales cum differentiis laterum suarum figurarum.* FIG. 62.

IV. Inde vero inferre licet, *duas quasvis diametros hyperbolæ reciproce proportionales esse differentiis laterum suarum figurarum.*

Ut enim diametri AB parameter est AD, ita sit EH parameter cujusvis alterius diametri EF. Dico, AB esse ad EF, ut est differentia ipsarum EF, EH ad differentiam, quæ est inter ipsas AB, AD.

Ob ostensum namque theorema, differentia inter quadratum alicujus diametri, & figuram ejus est eadem ubique. Quare differentia inter AB quadratum, & rectangulum DAB æqualis erit differentiæ inter EF quadratum, & rectangulum HEF.

Jam differentia inter AB quadratum, & rectangulum DAB tantundem valet, ac rectangulum ex AB in differentiam ipsarum AB, AD. Et similiter differentia inter EF quadratum, & rectangulum HEF perinde est, ac rectangulum ex EF in differentiam ipsarum EF, EH. Quare, quum æqualia sint inter se duo ista rectangula; erit, ut AB ad EF, ita differentia duarum EF, EH ad differentiam duarum AB, AD.

V. *Ex binis diametris, ad easdem hyperbolas terminatis ea majorem parametrum habet, quæ major est.* FIG. 62.

V. Atque hinc modo facile erit ostendere, quod *ex binis diametris, ad easdem hyperbolas terminatis ea, quæ major est, majorem parametrum habeat.*

Maneant enim omnia, ut supra. Et ponamus, diametrum AB minorem esse diametro EF. Dico, parametrum AD, quæ refertur ad diametrum minorem, esse etiam minorem parametro EH, quæ refertur ad diametrum majorem.

Osten-

Ostensum est namque, quod diameter AB sit ad diametrum EF, ut est differentia ipsarum EF, EH ad differentiam, quæ est inter ipsas AB, AD. Quare, sicuti AB minor est, quam EF; ita & differentia duarum EF, EH minor erit differentia duarum AB, AD.

Differentia igitur inter diametrum EF, & parametrum suam EH est minor differentia, quæ est inter diametrum AB, & parametrum suam AD. Sed EF major est, quam AB. Itaque EH multo major erit, quam AD.

Id quum ita sit, perspicuum est, quod, sicuti omnium diametrorum hyperbolæ minima est ea, quæ axis vocitatur; sic omnium parametrorum illa quidem sit minima, quæ refertur ad axem. Et quemadmodum omnes aliæ diametri in recessu ab axe continuo augentur; sic & parametri earundem in eodem recessu perpetuo quoque majores evadunt.

VI. Notetur autem hic sedulo velim, *proprietatem istam* veram esse in iis tantummodo diametris, quæ majores sunt suis parametris; quum allata demonstratio dumtaxat in eis illius veritatem evincat. Sed longe secus se res habet in diametris illis, quæ parametris suis sunt minores; quum in eis duo sunt casus distinguendi.

VI. *Quod præcedens proprietas non universaliter obtineat in diametris, minoribus parametris suis.*

Primus casus est, quum quadratum axis non est minus dimidio quadrati, quod fit ex suo conjugato. Et quum id contingit, minima quidem parameter est ea, quæ refertur ad axem; aliarum autem eæ semper sunt minores, quæ ad diametros item minores referuntur: adeo, ut hic quoque generaliter verum erit,

quod, crescentibus diametris, augeantur etiam parametri ipsarum.

Alter casus est, quum quadratum axis minus est dimidio quadrati, quod fit ex suo conjugato. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum adæquet semissem quadrati, quod fit ex ejus conjugata; erit parameter istius diametri omnium minima, tum item aliarum eæ semper minores erunt, quæ referuntur ad diametros, minus ab illa distantes.

VII. *Ostenduntur casus, qui obtinent, definiendo primum parametros diametrorum.*

Fig. 63.

VII. Neque vero difficile erit, *utriusque casus veritatem ostendere*. Si enim in triangulo rectangulo ABC referat latus BC axem hyperbolæ, & hypothenusa AC ejus conjugatum; per ea, quæ superius ostensa sunt, exhibente BE aliam quamvis diametrum, exhibebit AE conjugatam illius. Unde, erectis super ipsis AC, AE perpendiculis AI, AL; fiet CI parameter axis BC, & EL parameter diametri BE.

Quum enim in triangulo rectangulo CAI ex angulo recto A demissa sit ad hypothenusam CI perpendicularis AB; erit, ut BC ad AC, ita AC ad CI. Sed parameter axis BC est tertia proportionalis post ipsum axem, & ejus conjugatum. Itaque, quum sit AC conjugatus axis BC, erit CI parameter ejusdem axis BC.

Eadem ratione, quoniam in triangulo rectangulo EAL ex angulo recto A demissa est ad hypothenusam EL perpendicularis AB; erit, ut BE ad AE, ita AE ad EL. Sed parameter diametri BE est tertia proportionalis post ipsam diametrum, & ejus conjugatam,

Ita-

Itaque, quum sit AE conjugata diametri BE, erit EL ejusdem diametri parameter.

VIII. Demonstratio prædictorum casuum in medium affertur. Fig. 63.

VIII. Quemadmodum ergo CI est parameter axis BC, ita EL est parameter diametri BE. Et quoniam anguli CAI, EAL, qui cruribus suis abscindunt ex eadem AX portiones CI, EL, sunt æquales inter se; jam hic etiam sumus in eo casu, in quo angulus rectilineus vertitur circa verticem suum, & ex recta, positione data, cruribus suis parpetuo portionem aliquam abscindit.

Hinc, siquidem MAN sit positio anguli recti, in qua crura ejus æqualia fiunt; erit portio MN omnium minima; tum item aliarum eæ semper minores erunt, quæ ad ipsam MN magis accedunt. Unde eo res redit, ut ostendamus, BC quadratum non minus esse dimidio quadrati, quod fit ex AC, quotiescumque BC non minor est, quam BM; esse vero minus, quum per contrarium BC minor est, quàm BM.

Id vero liquet abunde. Nam, propter æquales AM, AN, sunt etiam æquales duæ AB, BM. Quare, quum BC non minor est, quam BM, nec etiam minor erit, quam AB: & propterea quadratum ejus nec item minus erit dimidio quadrati, quod fit ex AC. Vicissim vero, quum BC minor est, quam BM; erit BC minor quoque, quam AB: adeoque BC quadratum minus erit dimidio quadrati, quod fit ex AC.

IX. Definiuntur parametri diametrorum, quæ iis

IX. Cæterum *nolim hic silentio præterire*, quod sicuti, erectis super ipsis AC, AE perpendiculis AI, AL, fiunt CI, EL parametri

 ipsa-

sunt majores. ipsarum BC, BE; ita, demissis super iisdem

FIG. 63. AC, AE perpendiculis BH, BK, fiant portiones CH, EK parametri, quæ referuntur ad ipsas AC, AE.

Quum enim in triangulo rectangulo ABC ex angulo recto B demissa sit ad hypothenusam AC perpendicularis BH; erit, ut AC ad BC, ita BC ad CH. Sed parameter axis AC est tertia proportionalis post ipsum axem, & ejus conjugatum. Itaque, quum sit BC conjugatus axis AC, erit CH parameter ejusdem axis AC.

Simili ratione, quoniam in triangulo rectangulo ABE ex angulo recto B demissa est ad hypothenusam AE perpendicularis BK; erit, ut AE ad BE, ita BE ad EK. Sed parameter diametri AE est tertia proportionalis post ipsam diametrum, & ejus conjugatam. Itaque, quum sit BE conjugata diametri AE, erit EK ejusdem diametri parameter.

Jam, si super AB, velut diametro, semicirculus describatur, transibit iste per illa eadem puncta, in quæ cadunt perpendiculares BH, BK. Unde portio suæ circumferentiæ AH considerari poterit veluti locus parametrorum, quæ referuntur ad diametros AC, AE. Et inde rursus apparet, quod crescentibus hisce diametris, augeri debeant quoque parametri ipsarum.

X. *Quod diametri reciproce proportionales sint differentiis laterum suarum figurarum.*

X. Ex his omnibus colligi etiam denuo potest veritas theorematis superius ostensi, quod *duæ quævis hyperbolæ diametri sint reciproce proportionales differentiis laterum suarum figurarum*. Nam facile erit ostendere, re-

ctan-

ctangulum ex diametro quavis in differentiam laterum suæ figuræ adæquare semper quadratum datæ rectæ AB. *rum Vrursus ostenditur.* FIG. 63.

Sit enim primo AE diameter, de qua agitur. Et quoniam, ex ostensis, EK est ejus parameter; erit AK differentia laterum suæ figuræ. Unde eo res redit, ut ostendamus, rectangulum ex AE in AK æquale esse quadrato ex AB. Quod quidem liquet abunde; quum tres rectæ AE, AB, AK sint in continua proportione.

Sit secundo BE diameter, de qua est quæstio. Et quoniam, per superius ostensa, EL est parameter ejus; erit BL differentia laterum suæ figuræ. Unde eo res redit, ut ostendamus, rectangulum ex BE in BL æquale esse quadrato ex AB. Quod quidem ad huc liquido patet; quum tres rectæ BE, AB, BL sint in continua proportione.

XI. Quamquam autem vi hujus theorematis *differentia laterum figuræ diametri minuatur, crescente diametro*; attamen non perinde res est *de summa eorundem laterum*. Ubi enim diametri majores sunt suis parametris; tunc, quia cum diametro augetur quoque parameter ejus, necesse est, ut summa laterum figuræ cum eadem diametro pariter augeatur. Ubi vero diametri minores sunt parametris suis; tunc duo oportet casus distinguantur. *XI. Theoremata de summa, & differentia laterum figuræ diametri.* FIG. 63.

Primus casus est, quum quadratum axis non est minus triente quadrati, quod fit ex suo conjugato. Et quum id contingit, summa laterum figuræ ipsius axis erit omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum,

axi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eodem axe remotiorem: adeo, ut hic quoque generaliter verum erit quod, crescente diametro, augeatur etiam summa laterum suæ figuræ.

Alter casus est, quum quadratum axis est minus triente quadrati, quod fit ex suo conjugato. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum adæquet trientem quadrati, quod fit ex ejus conjugata; erit summa laterum figuræ istius diametri omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum, ipsi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eadem remotiorem.

XII. *Demonstratio casuum, qui locum habent in summa, quum diametri sunt minores suis parametris.* FIG. 63.

XII. Pendet autem *utriusque casus demonstratio ex præclaro isto theoremate*, quod manentibus omnibus, ut supra, si angulus rectus CAI revolvatur circa verticem suum A, summa duarum BC, CI eo minor evadat, quo magis ipse angulus ad eam positionem accedit, in qua quadratum cruris AC adæquat semissem quadrati, quod fit ex crure altero AI.

Sit enim MAN positio anguli recti, in qua quadratum cruris AM est æquale dimidio quadrati, quod fit ex crure altero AN. Erit igitur summa duarum BM, MN omnium minima; tum item aliarum summarum eæ semper minores erunt, quæ ad summam illam magis accedunt. Unde eo res redit, ut ostendamus, BC quadratum non minus esse triente quadrati, quod fit ex AC, quotiescumque BC non minor est, quam BM; esse vero minus, quum vicissim BC minor est, quam BM.

Id vero facili negotio ostendemus. Est

enim

enim AM quadratum ad AN quadratum, ut BM ad BN. Unde, ficuti AM quadratum eft dimidium quadrati, quod fit ex AN; ita quoque BM femiffis erit ipfius BN. Hinc, quotiefcumque BC non minor eft, quam BM, nec etiam BC minor erit, tum femiffe ipfius BI, cum triente totius CI: adeoque, quia BC quadratum eft ad AC quadratum, ut BC ad ad CI, nec item BC quadratum minus erit triente quadrati, quod fit ex AC. Viciffim vero, quum BC minor eft, quam BM, erit BC minor triente ipfius CI; & BC quadratum minus quoque triente quadrati, quod fit ex AC.

XIII. Memorabile eft autem, quod locum habet *in differentia quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus*. Ifta enim in diametris, quæ funt majores parametris fuis, augetur, crefcente diametro; in diametris vero, quæ parametris fuis funt minores, minuitur, ubi diameter crefcit: adeo, ut omnium minima eft illa, quæ refertur ad axem.

XIII. Theorema de differentia quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus. FIG. 63.

Capiatur etenim primo diameter AE, quæ major eft parametro fua EK. Et quoniam AE quadratum eft æquale AK, EK quadratis una cum duplo rectanguli AKE, five etiam duplo quadrati, quod fit ex BK; erit differentia quadratorum AE, EK æqualis quadrato ex AK una cum duplo quadrati ex BK; atque adeo æqualis duobus quadratis AB, BK. Sed fumma horum quadratorum eo major evadit, quo magis augetur diameter AE. Quare, crefcente diametro AE, augetur etiam differentia quadratorum AE, EK.

Capiatur secundo diameter BE, quæ minor est parametro sua EL. Et quoniam EL quadratum est æquale BE, BL quadratis una cum duplo rectanguli EBL, sive etiam duplo quadrati, quod fit ex AB; erit differentia quadratorum BE, EL æqualis quadrato ex BL una cum duplo quadrati ex AB; atque adeo æqualis duobus quadratis AB, AL. Sed summa horum quadratorum eo minor evadit, quo magis augetur diameter BE. Quare, crescente diametro BE, minuitur differentia quadratorum BE, EL.

XIV. *Theorema summa quadratorum, quæ fiunt ex figura lateribus.* Fig. 63.

XIV. Reliquum jam est, ut, quid obtineat *in summa quadratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus*, breviter ostendamus. Sane in diametris, quæ majores sunt suis parametris, ea crescit, crescente diametro. Et ratio est, quia una cum diametro augetur quoque parameter ejus. In diametris autem, quæ parametris suis sunt minores, duo sunt casus distinguendi.

Primus casus est, quum quadratum axis non est minus dimidio quadrati, quod fit ex differentia laterum suæ figuræ. Et quum id contingit, summa quadratorum ex lateribus figuræ ipsius axis, erit omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum, axi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eodem axe remotiorem: adeo, ut hic quoque generaliter verum erit, quod crescente diametro, augeatur quoque summa qudratorum, quæ fiunt ex figuræ lateribus.

Alter casus est, quum quadratum axis est minus dimidio quadrati, quod fit ex differen-

rentia laterum suæ figuræ. Et tunc, comperta diametro, cujus quadratum adæquet semissem quadrati ex differentia laterum figuræ ejus; erit summa quadratorum ex lateribus figuræ istius diametri omnium minima; ea vero, quæ refertur ad diametrum, ipsi propinquiorem, minor erit illa, quæ refertur ad diametrum, ab eadem remotiorem.

XV. Utriusque autem *casus demonstratio pendet ex hoc altero eleganti theoremate*, quod manentibus omnibus, ut supra, si angulus rectus CAI revolvatur circa verticem suum A, summa quadratorum ex ipsis BC, CI eo minor evadat, quo magis ipse angulus ad eam positionem accedit, in qua quadratum cruris AC est ad quadratum alterius cruris AI in eadem illa ratione, quam habet latus cujusque quadrati ad ejus diagonalem.

XV. *Demonstratio casuum, qui obtinent, quotiescumque diametri parametris suis sunt minores.*

FIG. 63.

Sit enim MAN positio anguli recti; in qua quadratum cruris AM est ad quadratum alterius cruris AN, ut est latus cujusque quadrati ad ejus diagonalem. Erit igitur summa quadratorum ex ipsis BM, MN omnium minima; tum item aliarum summarum eæ semper minores erunt, quæ ad summam illam magis accedunt. Unde eo res redit, ut ostendamus, BC quadratum non minus esse dimidio quadrati, quod fit ex BI, quotiescumque BC non minor est, quam BM; esse vero minus, quum vicissim BC minor est, quam BM.

Id vero nullo negotio ostendemus. Est enim AM quadratum ad AN quadratum, ut BM ad BN. Unde, sicuti AM quadratum est ad AN quadratum, ut latus cujusque quadra-

ti

ti ad ejus diagonalem ; ita in hac eadem ratione erit quoque BM ad BN : & propterea BM quadratum æquale erit dimidio quadrati, quod fit ex BN. Hinc, quotiescumque BC non minor est, quam BM, nec etiam BC quadratum minus erit dimidio quadrati, quod fit ex BI. Quotiescumque vero BC minor est, quam BM; erit itidem BC quadratum minus dimidio quadrati, quod fit ex BI.

C A P. VI.

Solvuntur problemata quædam circa hyperbolæ diametros, & parametros.

I. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum data sit ratio.* Fig. 60.

I. COmparatis inter se mutuo, tam diametris, quam parametris hyperbolæ; sequitur modo, ut problemata quædam resolvamus, quæ circa eas institui possunt. Primum itaque problema hoc erit: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam habeant rationem inter se*. Quem in finem referat in triangulo rectangulo ABC hypothenusa AC axem majorem, & latus BC axem minorem.

Per ea, quæ superius ostensa sunt, jam eo res redit, ut producta BC versus X, inveniatur in CX tale quidem punctum E, ut AE ad BE sit in data illa ratione. Itaque, quia ducta CS, ipsi AE parallela; AE est ad BE, ut CS ad BC; erit CS ad BC similiter in

in illa data ratione. Unde solvetur propositum problema, applicando intra angulum ABC rectam CS, quæ ad axem minorem BC datam habeat rationem; & ducendo per punctum A rectam AE, ipsi CS parallelam.

Patet autem, in solutione propositi problematis illud a nobis assumptum esse, ut ratio data sit majoris ad minus. Unde, si fuerit minoris ad majus, necesse est, ut ea invertatur. Sed liquet etiam, rationem datam minorem esse debere ea, quam habet axis major ad axem minorem; quia aliter punctum E reperiretur in ipso axe minore BC, atque adeo problema impossibile foret.

II. Secundum problema ita se habet: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant*. Maneant omnia, ut supra, & producta CB versus T, sit ABT rectangulum datum, quod quidem majus esse debet rectangulo ACB. Secetur AB bifariam in S. Et juncta ST, extendatur AB versus V, ita ut SV ipsi ST sit æqualis. Describatur deinde super AV semicirculus AEV; & erunt AE, BE diametri quæsitæ.

II. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum rectangulum contineant.*

FIG. 64.

Quum enim duæ ST, SV inter se sint æquales; erit quoque ST quadratum æquale quadrato, quod fit ex SV. Sed ST quadratum est æquale duobus quadratis BS, BT; & SV quadratum est æquale rectangulo AVB una cum BS quadrato. Itaque erunt quadrata duo BS, BT æqualia rectangulo AVB una cum BS quadrato: & propterea, dempto communi quadrato ex BS, supererit

BT

BT quadratum æquale rectangulo AVB.

Et quoniam, juncta VE, rectangulum AVB æquale est VE quadrato; erit etiam BT quadratum æquale VE quadrato. Unde, quum duæ BT, VE inter se sint æquales; erit rectangulum ABT æquale rectangulo ex AB in VE. Sed rectangulum ex AB in VE est æquale rectangulo AEB; quum AB sit ad AE, ut est BE ad VE. Quare rectangulum AEB erit æquale rectangulo ABT: & propterea duæ AE, BE erunt quæsitæ diametri.

III. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam summam conficiant.* Fig. 64.

III. Tertium problema in hunc modum concipitur; *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datam summam conficiant*. Iisdem, ut supra, manentibus, capiatur recta data super BX, & sit BZ, quam ex superius ostensis majorem esse oportet summa duorum axium AC, BC. Jungatur deinde AZ, cui perpendicularis erigatur AT, ipsi BZ occurrens in T. Secetur postea TZ bifariam in E; & juncta AE, exhibebunt duæ AE, BE quæsitas diametros.

Quum enim angulus ZAT sit rectus, semicirculus descriptus super TZ, velut diametro, transibit per punctum A. Sed centrum hujus semicirculi est punctum E; ut quod ex constructione dividit bifariam diametrum ejus TZ. Quare duæ AE, EZ æquales erunt inter se; proindeque, quia apposita communi BE, fiunt duæ AE, BE æquales toti BZ, erunt eædem AE, BE optatæ diametri.

IV. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diame-*

IV. Quartum problema hujusmodi erit: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum differentia sit data*. Ejus autem

autem solutio est fere eadem cum præcedente. Capiatur enim differentia data super CB producta, & sit BT; quam, per superius ostensa, minorem esse oportet differentia axium AC, BC. Jungatur deinde AT, cui perpendicularis erigatur AZ, ipsi BT occurrens in Z. Secetur postea TZ bifariam in E. Et juncta AE, fient AE, BE diametri quæsitæ.

tros conjugatas, quarum differentia sit data.

FIG. 64.

Nam similiter, quum angulus ZAT sit rectus, semicirculus, qui describitur super TZ, velut diametro, transibit per punctum A. Sed centrum hujus semicirculi est punctum E: quippe quod dividit ex constructione bifariam diametrum ejus TZ. Quare duæ AE, TE æquales erunt inter se: & propterea, quemadmodum BT est differentia duarum TE, BE; ita erit eadem BT differentia duarum AE, BE.

V. Quintum problema ita proponetur: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata datam summam constituant*. Ejus autem resolutio nullam difficultatem involvit. Quum enim differentia eorundem quadratorum æqualis esse debeat differentiæ, quæ est inter quadrata axium; utique data erit, tam summa, quam differentia eorum quadratorum.

V. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quarum quadrata datam summam constituant.*

Hinc, siquidem ad dimidium summæ addatur dimidium differentiæ, habebitur quadratum diametri majoris. Quod si autem ex dimidio summæ auferatur dimidium differentiæ, orietur quadratum diametri minoris. Quare diametrorum quadrata data etiam erunt seorsim; & consequenter dabuntur quoque

ipsæ

ipsæ diametri, quas oportet invenire.

Sicuti autem, quum quæruntur binæ diametri conjugatæ, quarum summa sit data, necesse est, ut data ista summa sit major summa axium; ita quoque, quum invenire oportet binas conjugatas diametros, quarum quadrata datam summam constituant, illud quidem requiritur, ut istiusmodi data summa sit major summa quadratorum, quæ fiunt ex axibus.

VI. *Datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum angulum contineant.*

VI. Sextum problema hunc in modum efferemus: *datis axibus hyperbolæ, invenire duas diametros conjugatas, quæ datum angulum contineant.* Sed facile erit, problema istud ad secundum revocare, in quo datis axibus hyperbolæ, quæruntur binæ diametri conjugatæ, quæ datum rectangulum comprehendant.

Nam semper ac datus est angulus, quem quæsitæ diametri continent; data erit ratio, quam habet ejus sinus ad radium. Sed ratio ista est æqualis ei, quam habet rectangulum sub axibus ad id, quod sub ipsis diametris continetur. Quare etiam hæc alia ratio data erit: & propterea, quum datum sit rectangulum sub axibus, dabitur quoque rectangulum, quod continent quæsitæ diametri.

VII. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, quæ datam parametrum habeat.*

VII. In septimo problemate illud porro quæremus, *qua ratione, datis axibus hyperbolæ, invenire liceat diametrum, quæ datam parametrum habeat.* Hujus autem problematis, perinde ac eorum omnium, quæ sequuntur, duo erunt casus, Nam diameter, quam quærimus,

Fig. 65.

vel invenienda est inter eas, quæ terminantur

tur ad hyperbolas axis majoris; vel etiam inter illas, quæ suos terminos habent in hyperbolis axis minoris.

In priore casu erigatur super AB perpendicularis BQ, quæ dimidium datæ parametri adæquet. Tum, juncta AQ, describatur centro Q, intervalloque QB circuli circumferentia, cum qua ipsa AQ conveniat in punctis T, & V. Denique in angulo ABC applicetur recta AE, æqualis ipsi AV. Et erit AE diameter quæsita.

Demisso enim super AE perpendiculo BK, erit eidem AB quadrato æquale, tam rectangulum EAK, quam rectangulum TAV, Quare duo ista rectangula EAK, TAV æqualia erunt inter se: & propterea, quemadmodum sunt æquales duæ AE, AV, ita æquales erunt pariter, tam duæ AK, AT, quam duæ EK, TV. Sed TV, velut dupla ipsius BQ, datam parametrum adæquat. Et igitur eidem parametro æqualis quoque erit ipsa EK, quæ est parameter diametri AE.

In secundo vero casu applicetur in angulo ABQ recta AQ, quæ semissem adæquet datæ parametri. Fiat deinde QE æqualis ipsi AQ. Et erit BE quæsita diameter. Nam, si centro Q, intervalloque QE semicirculus describatur, ipsi BE occurrens ad partem alteram in L: ob angulum rectum EAL, erit EL parameter ipsius BE; adeoque, quum EL sit dupla ipsius QE, sive AQ, erit EL datæ parametro æqualis.

VIII. Ad octavum problema quod attinet, quæremus in eo, *qua ratione, datis axibus hy-* VIII. *Datis axibus hyperbola*,

invenire diametrum, quæ ad parametrum suam datam habeat rationem.

Fig. 64.

hyperbolæ, inveniri possit diameter, quæ ad parametrum suam datam habeat rationem. Et ubi quidem data ratio est majoris ad minus, diameter, quam quærimus, invenienda est inter eas, quæ terminantur ad hyperbolas axis majoris. Quotiescumque vero est minoris ad majus, comperienda inter illas, quæ suos terminos habent in hyperbolis axis minoris.

In priore casu extendatur AB usque in V: ita, ut AV ad BV sit in data ratione. Describatur deinde super AV semicirculus AEV. Et erit AE diameter quæsita. Nam, demisso super AE perpendiculo BK, fiet EK parameter ipsius AE. Sed AE est ad EK, ut AV ad BV. Itaque diameter AE ad parametrum suam EK erit in data ratione.

In secundo casu extendatur quoque AB usque in V, sed ita tamen, ut BV ad AV sit in data ratione. Postea describatur similiter super AV semicirculus AEV. Et erit BE diameter optata. Nam, erecto super AE perpendiculo AL, fiet EL parameter ipsius BE. Sed BE est ad EL, ut BV ad AV. Itaque diameter BE ad parametrum suam EL erit in data ratione.

Idem problema potest etiam ad primum revocari. Nam, semper ac data est ratio, quam quæsita diameter habere debet ad suam parametrum; utique data erit pariter ratio, quam eadem quæsita diameter habebit ad suam conjugatam: quippe quæ illius est duplicata. Unde vicissim primum problema ad octavum istud poterit reduci: quærendo nempe diametrum, quæ ad suam parametrum habeat ratio-

nem

nem subduplicatam ejus, quæ inter utramque diametrum esse debet.

IX. Nonum problema eo se vertet, ut *datis axibus hyperbolæ, inveniatur diameter, quæ, vel constituat datam summam cum sua parametro, vel differat ab ea per datam differentiam.* Et quantum ad priorem partem, solvetur problema in eum, qui sequitur, modum.

IX. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, quæ vel constituat datam summam cum sua parametro, vel differat ab ea per datam differentiam.*

Sit primo dimameter invenienda ex earum numero, quæ parametris suis sunt majores. Extendatur CB versus M, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum, juncta AM, erigatur super ea perpendicularis MN æqualis dimidio datæ summæ. Describatur deinde centro N, intervalloque NM circuli circumferentia MOR, conveniens cum AN in punctis O, & R. Jamque, si in angulo ABC applicetur recta AE, æqualis dimidio ipsius AO; fiet AE diameter quæsita.

FIG. 65.

Demittatur enim super AE perpendicularis BK; eritque, tam rectangulum OAR æquale quadrato ex AM, quam rectangulum EAK æquale quadrato ex AB. Sed, ex constructione, AM quadratum duplum est quadrati ex AB. Quare etiam rectangulum OAR duplum erit rectanguli EAK: proindeque, secta AO bifariam in S, fiet rectangulum SAR æquale rectangulo EAK; atque adeo, ob æquales AE, AS, erunt etiam æquales, tam duæ AK, AR, quam duæ EK, RS. Unde, additis æqualibus AE, OS; erit summa duarum AE, EK æqualis toti OR, quæ dupla est ipsius MN.

Sit deinde diameter invenienda ex nu-

mero illarum, quæ vicissim sunt minores suis parametris. Extendatur quoque CB versus M, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum, juncta AM, fiat adhuc angulus rectus AMN, in quo tamen applicetur recta AN, æqualis dimidio datæ summæ. Describatur pariter centro N, intervalloque NM circuli circumferentia MOR, conveniens cum AN in punctis O, & R. Jamque, si ex BX abscindatur portio BE, æqualis dimidio ipsius AO; fiet BE diameter quæsita.

Erigatur enim super AE perpendicularis AL; eritque, tam rectangulum OAR æquale quadrato ex AM, quam rectangulum EBL æquale quadrato ex AB. Sed, ex constructione, AM quadratum duplum est quadrati ex AB. Quare etiam rectangulum OAR duplum erit rectanguli EBL: proindeque, secta AO bifariam in S, fiet rectangulum SAR æquale rectangulo EBL; atque adeo, ob æquales BE, AS, erunt etiam æquales duæ BL, AR. Unde summa duarum BE, EL æqualis erit summæ duarum AO, AR, quæ dupla est ipsius AN.

Quantum ad secundam partem, nullo negotio solvetur problema. Nam, si diameter invenienda sit inter eas, quæ parametris suis sunt majores; satis erit, in semicirculo, descripto super AB velut diametro, applicare rectam AK, quæ sit æqualis datæ differentiæ; quandoquidem ista, producta usque ad E, dabit diametrum quæsitam. Quod si vero diameter comperienda sit inter eas, quæ minores sunt suis parametris; tunc extendatur

CB

CB usque in L, ut sit BL æqualis differentiæ datæ. Et, erecta super AL perpendiculari AE, fiet BE diameter optata.

X. Decimum problema illud ostendet, *qua ratione, datis axibus hyperbolæ, invenire liceat diametrum, cujus parameter cum differentia laterum figuræ datum rectangulum contineat*. Jamque, si diameter invenienda debet esse ex numero earum, quæ suis parametris sunt majores, solvetur problema, si descripto super AB, velut diametro semicirculo AKB, applicetur in eo recta BK, cujus quadratum datum rectangulum adæquet. Nam, juncta AK fiet, AE diameter quæsita.

X. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, cujus parameter cum differentia laterum figuræ datum rectangulum contineat.*

FIG. 63.

Quum enim diametri AE parameter quidem sit EK, differentia vero laterum figuræ sit AK; erit AKE rectangulum, quod fit ex parametro ejus in differentiam laterum suæ figuræ. Sed rectangulum AKE est æquale quadrato ipsius BK. Quare, sicuti BK quadratum, ex constructione, datum rectangulum adæquat; ita quoque eidem dato rectangulo æquale erit rectangulum AKE.

Quod si vero diameter invenienda debeat esse ex numero illarum, quæ minores sunt suis parametris, solvetur problema, si producta CB versus L, applicetur in angulo ABL recta AL talis longitudinis, ut ejus quadratum sit æquale dato rectangulo. Nam, si deinde super AL perpendicularis erigatur AE, ipsi BC occurrens in E; fiet BE diameter optata.

Quum enim diametri BE parameter quidem sit EL, differentia vero laterum figuræ

sit BL; erit ELB rectangulum, quod fit ex parametro ejus in differentiam laterum suæ figuræ. Sed rectangulum ELB est æquale quadrato ipsius AL. Quare, sicuti AL quadratum, ex constructione, datum rectangulum adæquat; ita quoque eidem dato rectangulo æquale erit rectangulum ELB.

Hoc idem problema poterat etiam ad præcedens revocari. Quum enim datum sit rectangulum, quod fit ex parametro in differentiam laterum figuræ; & rectangulum ex diametro in eandem illam differentiam similiter sit datum: dabitur quoque differentia horum rectangulorum, hoc est quadratum ex differentia laterum figuræ; & consequenter ipsa laterum differentia etiam data erit, Unde eo res redit, ut quæramus diametrum, quæ differat a sua parametro per datam differentiam.

XI. Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, cujus quadratum differat a quadrato parametri per datam differentiam.

XI. In undecimo problemate ostendemus *quo pacto, datis axibus hyperbolæ, inveniri possit diameter, cujus quadratum differat a quadrato parametri per datam differentiam.* Atque hic quoque duo sunt casus distinguendi. Nam quæsita diameter, vel invenienda est inter eas, quæ parametris suis sunt majores; vel etiam inter illas, quæ vicissim sunt minores suis parametris.

FIG. 66. Quantum ad priorem casum solvetur problema in hunc modum. Extendatur CB versus M, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum juncta AM, describatur super ea, velut diametro, semicirculus ANM, in quo applicetur recta MN talis longitudinis, ut quadratum

ejus

ejus datam differentiam adæquet. Jungatur deinde AN. Jamque, si in semicirculo AKB applicemus rectam AK, æqualem ipsi AN; erit AE diameter quæsita.

Quum enim AK sit æqualis ipsi AN, erunt quadrata duo AK, MN æqualia quadrato ex AM. Sed quadratum ex AM, velut duplum quadrati, quod fit ex AB, est æquale duplo rectanguli EAK. Quare quadrata duo AK, MN duplo rectanguli EAK pariter æqualia erunt: & consequenter, apposito communi quadrato ex EK, erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duplo rectanguli EAK una cum EK quadrato.

Jam duplum rectanguli EAK una cum EK quadrato est æquale duobus quadratis AK, AE. Quare erunt tria quadrata AK, MN, EK æqualia duobus quadratis AK, AE; adeoque, dempto communi quadrato ex AK, remanebunt quadrata duo MN, EK æqualia quadrato ex AE. Unde quadratum diametri AE superabit quadratum suæ parametri EK per MN quadratum, quod ex constructione datam differentiam adæquat.

Quantum ad secundum casum, solutio problematis fiet hoc pacto. Extendatur rursus CB versus M, ut fiat BM æqualis ipsi AB. Tum, juncta AM, erigatur super ea perpendicularis MN. Et in angulo AMN applicetur recta AN talis longitudinis, ut quadratum ejus datam differentiam adæquet. Fiat postea BL æqualis ipsi MN. Et, erecta super AL perpendiculari AE, erit BE diameter quæsita. Fig. 65.

Quum enim AM quadratum sit æquale

duplo quadrati ex AB, sive etiam duplo rectanguli EBL: apposito communi quadrato ex MN, sive BL; erit AN quadratum æquale duplo rectanguli EBL una cum BL quadrato: & propterea, addito rursus communi quadrato ex BE, erunt duo quadrata AN, BE æqualia duplo rectanguli EBL una cum duobus quadratis BL, BE.

Et quoniam duplum rectanguli EBL una cum duobus quadratis BL, BE est æquale quadrato, quod fit ex EL; erit EL quadratum æquale duobus quadratis AN, BE. Unde quadratum diametri BE superabitur a quadrato suæ parametri EL per AN quadratum, quod ex constructione datam differentiam adæquat.

XII. *Datis axibus hyperbolæ, invenire diametrum, in qua data sit summa quadratorũ, quæ fiunt ex lateribus suæ figuræ.*

Fig. 64.

XII. In ultimo problemate docebimus; *quomodo, datis axibus hyperbolæ, inveniri possit diameter talis, ut data sit summa quadratorum, quæ fiunt ex lateribus suæ figuræ*. Ac primo quidem, si diameter invenienda debeat esse ex earum numero, quæ parametris suis sunt majores, solvetur problema in eum, qui sequitur, modum.

Extendatur AB usque in Y, ita ut duplum rectanguli ABY datam illam summam exhibeat. Tum secetur AY ita quidem in puncto V, ut AB quadratum sit æquale duplo rectanguli AVY. Describatur postea super AV, velut diametro, semicirculus AEV. Et recta AE exhibebit diametrum quæsitam.

Nam, demissa super AE perpendiculari BK, erit summa quadratorum AE, EK ad summam quadratorum AV, BV, ut est AE

qua-

quadratum ad AV quadratum; sive etiam, ut est AB ad AV; sive demum, ut est rectangulum ABY ad rectangulum ex AV in BY. Sed summa quadratorum AV, BV est æqualis duplo rectanguli ex AV in BY; quum rectangulum istud sit æquale rectangulo AVB una cum rectangulo AVY, quod ex constructione æquale est dimidio quadrati ex AB. Quare etiam summa quadratorum AE, EK æqualis erit duplo rectanguli ABY.

Quod si vero diameter invenienda debeat esse ex numero illarum, quæ minores sunt suis parametris, solvetur problema hac ratione. Extendatur quoque AB usque in Y, sed ita tamen, ut duplum rectanguli BAY exhibeat datam summam. Tum secetur BY ita quidem in puncto V, ut AB quadratum sit æquale duplo rectanguli BVY. Describatur postea super AV, velut diametro, semicirculus AEV. Et recta BE exhibebit quæsitam diametrum.

Nam, erecto super AE perpendiculo AL, erit summa quadratorum BE, EL ad summam quadratorum BV, AV, ut est BE quadratum ad BV quadratum; sive etiam, ut est AB ad BV; sive demum, ut est rectangulum BAY ad rectangulum ex BV in AY. Sed summa quadratorum BV, AV est æqualis duplo rectanguli ex BV in AY; quum rectangulum istud sit æquale rectangulo BVA una cum rectangulo BVY, quod ex constructione æquale est dimidio quadrati ex AB. Quare etiam summa quadratorum BE, EL æqualis erit duplo rectanguli BAY.

XIII. *Datis axibus hyperbolæ, invenire in ordine ad eos positionem cujusvis diametri datæ.*

XIII. Cæterum, quæ requirantur, ut singula ista problemata resolvi possint, abunde nos docent, tum ea, quæ superius ostensa sunt, tum ipsæ eorum problematum allatæ solutiones. Unde, ne diutius in iis recensendis hæreamus, sufficiat istud indicasse, & ad theoriæ hujus complementum ostendemus modo, *qua ratione, datis axibus hyperbolæ, definiri possit relate ad eos positio cujusvis diametri datæ*. Nam in solutione illorum problematum apolloniana exhibetur quoque positio diametri relate ad datos axes hyperbolæ.

FIG. 67. Sint itaque AB, KL axes hyperbolæ. Sit autem EF aliqua ejusdem hyperbolæ diameter data, quæ suos terminos habeat in iisdem illis hyperbolis, ad quas terminatur axis major AB. Jam innotescet diametri hujus positio, si demissa ad axem AB ordinata EG, nota sit longitudo portionis CG. Unde, eo res redit, ut inquiramus, quo pacto ipsius CG longitudo possit definiri.

Et sane, propter hyperbolam, CA quadratum est ad CK quadratum, ut est rectangulum AGB ad EG quadratum. Sed EG quadratum æquale est differentiæ quadratorum CE, GG; & rectangulum AGB æquale est differentiæ quadratorum CA, CG. Itaque erit, ut CA quadratum ad CK quadratum, ita differentia quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CE, CG.

Hinc, quum convertendo fit, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CK, ita differentia quadratorum CA, CG ad differentiam quadratorum CA, CE; erit, per-

mu-

mutando, ut CA quadratum ad differentiam quadratorum CA, CG, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CA, CE. Unde, addendo antecedentes consequentibus, erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita differentia quadratorum CA, CK ad differentiam quadratorum CE, CK.

Describantur jam super ipsis CA, CE semicirculi AMC, ENC; & aptentur in iis rectæ CM, CN, quarum utraque sit æqualis ipsi CK. Jamque, junctis rectis AM, EN, erit AM quadratum æquale differentiæ quadratorum CA, CK; & EN quadratum æquale differentiæ quadratorum CE, CK. Unde erit, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita AM quadratum ad EN quadratum: & propterea, quum proportionales sint quatuor rectæ AM, EN, CA, CG; invenietur CG, si fiat, ut AM ad EN, ita CA ad ipsam CG.

XIV. *In hyperbola data parametro unius diametri, invenire parametrum cujusvis alterius diametri.*

XIV. Ne aliquid hic omittamus, ostendemus denique, *qua ratione in ipsa hyperbola, data parametro unius diametri, inveniri possit parameter cujusvis alterius diametri.* Sint igitur AB, EF duæ quævis hyperbolæ diametri. Et, data parametro unius diametri AB, oporteat, invenire parametrum alterius diametri EF.

FIG. 68.

Sit AD parameter diametri AB, quæ super ipsa AB capiatur. Tum, secta AD bifariam in puncto M, describatur per tria puncta A, E, M circulus AEM, occurrens ipsi EF in puncto N. Abscindatur porro ex EF portio EH, quæ sit dupla ipsius EN. Et erit EH parameter diametri EF.

Est

Est enim, propter circulum, rectangulum ACM æquale rectangulo ECN. Sed rectangulum ABD est quadruplum rectanguli ACM, & rectangulum EFH est quadruplum rectanguli ECN. Quare duo rectangula ABD, EFH etiam æqualia erunt: & propterea erit, ut diameter EF ad diametrum AB, ita BD ad FH.

Jam per ea, quæ superius ostensa sunt, diametri EF, AB sunt reciproce proportionales differentiis laterum suarum figurarum. Quare erit ex æquali, ut BD ad FH, ita differentia laterum figuræ diametri AB ad differentiam laterum figuræ diametri EF: & propterea, quemadmodum prior differentia est æqualis ipsi BD; ita quoque differentia posterior æqualis erit ipsi FH. Unde erit EH parameter diametri EF.

C A P. VII.

Parametri diametrorum parabolæ inter se mutuo comparantur.

I. *Theorema fundamentale pro instituenda comparatione parametrorum parabolæ.*

I. Diametros parabolæ haud quidem necesse est, ut inter se mutuo conferamus. Nam, quum sint infinitæ longitudinis, ex mutua ipsarum comparatione nihil quidem erui potest. Conferemus autem inter se invicem parametros diametrorum.

FIG. 69. Nam, velut finitæ longitudinis, inter se mu-

tuo

tuo collatæ, plures nobis proprietates subministrabunt.

Ad hanc comparationem instituendam *conducit non parum sequens theorema*: nimirum, quod si AB sit axis parabolæ, AD parameter ejus, AM subtensa aliqua, ex axis vertice ducta, & MN ejusdem axis ordinata: quod, inquam, quadratum subtensæ AM sit æquale rectangulo, quod fit ex abscissa AN in summam ipsarum AD, AN.

Ostendetur vero theorema istud in hunc modum. Quoniam MN est axis ordinata, erit angulus ANM rectus. Quare quadratum ipsius AM æquale erit duobus quadratis AN, MN. Sed, ob parabolæ naturam, MN quadratum est æquale rectangulo DAN; & AN quadratum una cum rectangulo DAN est æquale ei, quod fit ex AN in summam ipsarum AD, AN. Itaque quadratum subtensæ AM erit æquale rectangulo, quod fit ex abscissa AN in eam, quæ componitur ex ipsis AD, AN.

II. Sit jam EF diameter parabolæ, cujus ordinatæ parallelæ sunt subtensæ AM; sitque etiam EH parameter ejus. Ducatur ex ejusdem vertice E ordinata ad axem EG. Et *ex ostenso theoremate facile erit inferre*, quod parameter diametri EH superet parametrum axis AD per quadruplum abscissæ AG. II. *Theorema, de excessu, quo parameter cujusque diametri superat parametrum axis.* FIG. 69.

Quum enim subtensa AM a diametro EF secetur bifariam in O; erit MN dupla ipsius EG; adeoque MN quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex EG. Sed MN quadratum est ad EG quadratum, ut AN ad

AG. Quare etiam AN quadrupla erit ipsius AG: & propterea, quia ex superius ostensis duæ AG, EO sunt æquales inter se; erit eadem AN quadrupla pariter ipsius EO.

Hinc, sicuti AM quadratum quadruplum est AO quadrati, ita rectangulum ex EH in AN quadruplum erit rectanguli ex EH in EO: proindeque erit, ut AM quadratum ad AO quadratum, ita rectangulum ex EH in AN ad rectangulum ex EH in EO. Sed, ob parabolæ naturam, AO quadratum est æquale rectangulo ex EH in EO. Quare etiam AM quadratum æquale erit rectangulo ex EH in AN.

Et quoniam, per ostensum theorema, idem AM quadratum est æquale pariter rectangulo ex AN in summam ipsarum AD, AN; erit rectangulum istud æqnale ei, quod fit ex EH in AN: proindeque EH æqualis erit ipsis AD, AN simul sumptis. Unde parameter diametri EH superabit parametrum axis AD per AN, quæ est æqualis quadruplo ipsius AG.

III. *Cujusmodi se habeant parametri diametrorum in parabola; demonstratur.* Fig. 69.

III. Atque hinc modo liquet abunde; *omnium parabolæ parametrorum minimam esse illam, quæ refertur ad axem*; quum parameter cujusvis alterius diametri superet parametrum axis per quadruplum ejus abscissæ, quam aufert ab ipso axe ordinata, ad eum ducta ex vertice diametri.

Patetque etiam, *aliarum parametrorum eam semper minorem esse, quæ refertur ad diametrum, axi propinquiorem*. Nam, quo magis diameter EF accedit ad axem AB, eo mi-

nor

nor evadit abscissa AG, per cujus quadruplum parameter diametri superat parametrum ipsius axis.

Patetque demum, *aequales esse parametros earum diametrorum, quae aequaliter bino inde distant ab axe*. Nam ordinatae, quae ex ipsarum verticibus ducuntur ad axem, eandem ab ipso axe auferunt abscissam; adeoque idem est excessus, per quem cujusque diametri parameter superat parametrum axis.

Vidimus autem, haec omnia obtinere etiam, generaliter quidem in ellipsi, & in hyperbola tunc tantum, quum axis est major suo conjugato. Unde, quia utraque earum curvarum vertitur in parabolam, quotiescumque centrum abit in infinitum; poterit hac item ratione eorum omnium veritas ostendi.

IV. In recessu itaque diametri ab axe parabolae, augetur parameter ejus. Sed, quemadmodum nobis innotuit excessus, per quem parameter cujusque diametri superat parametrum axis; ita licebit etiam, *excessum definire, per quem parameter diametri, ab axe remotioris, superat parametrum diametri, eidem axi propinquioris*. IV. *Theorema de excessu, quo parameter diametri, ab axe remotioris, superat parametrum diametri, eidem axi propinquioris.*

Maneant enim omnia, ut supra; sitque KL diameter altera, remotior ab axe AB, cujus parameter sit recta KI. Ducatur ex vertice ejus K ad axem AB ordinata KR, quae occurrat diametro EF in puncto Q. Dico, parametrum KI superare parametrum EH per quadruplum ipsius EQ. Fig. 69.

Nam, sicuti EH est aequalis AD una cum quadruplo ipsius AG; ita KI aequalis erit eidem

dem AD una cum quadruplo ipsius AR. Quare excessus, quo KI superat EH, æqualis erit excessui, quo qudruplum abscissæ AR superat quadruplum abscissæ AG. Sed excessus iste est quadruplum ipsius GR, sive EQ. Itaque per idem hoc quadruplum parameter KI superabit parametrum EH.

Quod quum ita sit, perspicuum est, theorema generale, quod in hac re locum obtinet, ita quidem concipi debere; nimirum, *quod differentia parametrorum, quæ ad duas quasvis diametros referuntur, sit æqualis portioni, quam ex diametro, axi propinquiore, aufert perpendicularis ad eam ducta ex vertice alterius remotioris.*

V. *Excessus, quibus parametri diametrorum superant parametrum axis, sunt in duplicata ratione rectarum, quibus diametri distant ab axe.*

V. Sed nolo hic reticere pulcherrimum *istud theorema, respiciens excessus, quibus parametri aliarum diametrorum superant parametrum axis*: scilicet, quod excessus isti sint inter se in duplicata ratione rectarum, quibus ipsæ diametri distant ab axe.

FIG. 69. Esto enim AB axis parabolæ, EF diameter propinquior, & KL diameter remotior. Sint autem AD, EH, KI parametri ipsarum. Dico, excessus, quibus parametri diametrorum EH, KI superant parametrum axis AD, esse inter se in duplicata ratione rectarum, quibus ipsæ diametri EF, KL distant ab axe AB.

Ducantur namque ex verticibus diametrorum E, & K ordinatæ ad axem EG, KR. Et quoniam ordinatę istæ rectos cum axe angulos constituunt, metientur eæ distantias diametrorum EF, KL ab ipso axe AB. Unde eo res

re-

redit, ut ostendamus, excessus, quibus parametri diametrorum EH, KI superant parametrum axis AD, esse inter se, vuluti sunt quadrata ordinatarum EG, KR.

Id vero ostendemus in hunc modum. Excessus, quo EH superat AD, est quadruplum abscissæ AG. Pariterque excessus, quo KI superat AD, est quadruplum abscissæ AR. Quare excessus, quibus parametri diametrorum EH, KI superant parametrum axis AD, erunt ut abscissæ AG, AR; atque adeo, ob parabolæ naturam, ut quadrata ordinatarum EG, KR.

VI. *Datis axe parabolæ, & parametro ejus, invenire diametrum, quæ habeat parametrum datam.* FIG. 69.

VI. Cæterum ex eo, quod parameter cujusque diametri superet parametrum axis per quadruplum ejus abscissæ, quam aufert ex axe ordinata ad eum ducta ex vertice diametri, facile erit, *datis axe parabolæ, & parametro ejus, invenire diametrum, quæ habeat parametrum datam.*

Sit enim AB axis parabolæ, & AD parameter ejus. Et quoniam parameter axis est omnium minima; utique parameter data major esse debet ipsa AD. Capiatur itaque excessus, quo data parameter superat AD, & quadranti ejus æqualis constituatur abscissa AG. Erigatur porro ex puncto G perpendicularis GE, parabolæ occurrens in E. Et, ducta per punctum E recta EF, ipsi AB parallela, erit ista diameter quæsita.

Esto namque EH parameter ipsius EF. Jamque, ex superius ostensis, parameter ista EH superabit parametrum axis AD per quadruplum abscissæ AG. Sed, ex constructione, per hoc idem quadruplum parameter da-

data superat eandem AD. Quare erit EH æqualis datæ parametro: & propterea erit EF quæsita diameter.

VII. *Datis diametro aliqua parabolæ, & parametro ejus, invenire diametrum aliam, quæ datam habeat parametrum.*

FIG. 69.

VII. Si loco axis, & suæ parametri detur diameter quævis alia cum parametro ejus, per ea, quæ superius ostensa sunt, etiam licebit *invenire diametrum alteram, quæ habeat parametrum datam*. Sed hic duo sunt casus distinguendi. Vel enim data parameter est major ea, quæ refertur ad diametrum datam; vel vicissim minor.

In priore casu solvetur problema in hunc modum. Sit EF diameter data, & EH parameter ejus. Capiatur excessus, quo data parameter superat EH; & quadranti ejus æqualis constituatur portio EQ. Erigatur deinde ex puncto Q perpendicularis QK, parabolæ occurrens in K. Et, ducta per punctum K recta KL, ipsi EF parallela, erit ista diameter quæsita.

Esto enim KI parameter ipsius KL. Jamque, ex superius ostensis, parameter ista KI superabit parametrum EH per quadruplum portionis EQ. Sed, ex constructione, per hoc idem quadruplum parameter data superat eandem EH. Quare erit KI æqualis datæ parametro: & propterea erit KL quæsita diameter.

In secundo autem casu solutio problematis fiet hoc pacto. Sit KL diameter data, & KI parameter ejus. Capiatur excessus, quo KI superat datam parametrum; & quadranti ejus æqualis constituatur recta KP, ipsi KL in directum existens. Erigatur deinde ex puncto P perpendicularis PE, parabolæ occur-

rens

rens in E. Et, ducta per punctum E recta EF, ipsi KL parallela, erit ista diameter optata.

Sit namque EH parameter ipsius EF. Jamque, ex superius ostensis, ducta KQ, ipsi EF perpendiculari, parameter KI superabit parametrum EH per quadruplum portionis EQ, sive KP. Sed, ex constructione, per idem hoc quadruplum eadem KI superat parametrum datam. Quare erit EH æqualis datæ parametro: & propterea quæsita diameter erit ipsa EF.

Patet autem, problema esse semper solutionis capax in primo casu, sed non item in secundo; quia fieri potest, ut perpendicularis PE minime occurrat parabolæ: quod quidem quum contingit, nulla erit diameter, cui data parameter competit. Nec id mirum esse debet; quandoquidem, si parameter data minor sit ea, quæ refertur ad axem, omnino necesse est, ut problema sit solutu impossibile.

VIII. Non dissimili artificio, *data parametro unius diametri, inveniri poterit parameter cujusvis alterius diametri*. Sint enim EF, KL duæ quævis parabolæ diametri. Et, data parametro unius diametri EF, quæ sit EH, oporteat, invenire parametrum alterius diametri KL.

VIII. *Data parametro unius diametri, invenire parametrum cujusvis alterius diametri.*

Fig. 69.

Ex vertice K alterius diametri demittatur super EF perpendicularis KQ. Jamque duo contingere possunt. Primo nempe, ut punctum Q cadat infra verticem E. Et secundo, ut idem punctum Q cadat supra verticem E. In priore casu parameter diametri KL major erit parametro diametri EF. In secundo

vero casu erit per contrarium minor.

In utroque autem casu differentia parametrorum est semper quadruplum portionis EQ. Unde, siquidem contingat, ut punctum Q cadat infra verticem E, invenietur parameter diametri KL, addendo quadruplum ejus portionis ad EH, quæ est parameter ipsius EF. Quod si vero accidat, ut punctum Q cadat supra verticem E, habebitur quæsita parameter, subducendo ex EH quadruplum ejusdem illius portionis.

Fieri quoque potest, ut perpendicularis, quæ demittitur super EF ex vertice alterius diametri K, cadat in ipsum verticem E. Et in isto casu, evanescente portione EQ, utraque constructio nobis ostendet, eandem EH esse etiam parametrum diametri KL. Quod quidem mirum esse non debet; quia, quum id contingit, binæ diametri EF, KL reperiuntur æqualiter hinc inde ab axe distantes.

IX. *Alia ejusdem problematis solutio in medium affertur.* FIG. 70.

IX. Possumus quoque, *data parametro unius diametri, reperire parametrum alterius diametri*, eodem illo artificio, quo superius usi sumus, ad idem problema solvendum in hyperbola, & ellipsi. Sint enim AB, EF duæ quævis parabolæ diametri. Et, data parametro unius diametri AB, oporteat, invenire diametrum alterius EF.

Sit AD parameter diametri AB, quæ cum ipsa AB ponatur in directum. Tum, secta AD bifariam in puncto M, describatur per tria puncta A, E, M circulus AEM, occurrens ipsi EF productæ in puncto N. Extenda-

datur porro EN usque ad punctum H: ita, ut sit EH dupla ipsius EN. Et erit EH parameter diametri EF.

Demittatur siquidem super AB perpendicularis EG. Jamque, per superius ostensa, differentia parametrorum, quæ referuntur ad diametros AB, EF, est quadruplum portionis AG. Unde eo res redit, ut ostendamus rectas AD, EH differre a se mutuo per quadruplum ipsius AG.

Id vero facili negotio ostendemus. Nam, demisso ex puncto N super eadem AB perpendiculo alio NO, erunt duæ AG, MO æquales inter se: proindeque differentia rectarum AM, EN erit duplum portionis AG. Sed ex constructione AD est dupla ipsius AM, & EH dupla ipsius EN. Itaque differentia rectarum AD, EH erit quadruplum ejusdem AG.

X. Reliquum jam est, ut breviter ostendamus quæcumque pertinent ad angulos, quos parabolæ diametri cum ordinatis suis constituunt. Hunc in finem, *præmittendum est prius sequens theorema*, quod si AB, EF sint duæ quævis parabolæ diametri, super quibus ex alternis earum verticibus ducantur ordinatæ EG, AO; ordinatæ istæ sint in subduplicata suarum parametrorum ratione.

X. Lemma pro determinatione angulorum, quos diametri cum suis ordinatis constituunt.

FIG. 69.

Sit enim AD parameter diametri AB, & EH parameter diametri EF. Erit igitur, ob parabolæ naturam, EG quadratum æquale rectangulo DAG, & AO quadratum æquale rectangulo HEO. Quare erit, ut EG quadratum ad AO quadratum, ita rectangulum DAG ad rectangulum HEO.

Et quoniam ex superius ostensis, ordinatæ EG, AO abscindunt ex diametris AB, EF portiones æquales; erit abscissa AG æqualis abscissæ EO. Unde, quemadmodum rectangulum DAG est ad rectangulum HEO, ut AD ad EH; ita in hac eadem ratione erit pariter EG quadratum ad AO quadratum: & propterea ipsæ ordinatæ EG, AO erunt in subduplicata ratione parametrorum AD, EH.

XI. *Theoremata de angulis, quos efficiunt diametri cum suis ordinatis.*

XI. Hinc vero prono alveo fluunt quæcumque obtinent *circa angulos, quos parabolæ diametri cum ordinatis suis constituunt.*

Fig. 69.

Nimirum consequitur primo, *sinum anguli, quem diameter quævis constituit cum ordinatis suis, esse ad radium in subduplicata ratione ejus, quam habet parameter axis ad parametrum ejus diametri.*

Posito enim, quod AB sit axis parabolæ, & EF diameter quævis, si ducatur ad hanc diametrum ordinata AO, & ex puncto O demittatur ad axem perpendicularis OL; erit, ut sinus anguli BAO ad radium, ita OL ad AO, sive etiam ita EG ad AO. Sed EG ad AO est in subduplicata ratione parametrorum AD, EH. Quare in hac eadem subduplicata ratione erit etiam sinus anguli BAO ad radium.

Consequitur secundo, *sinus angulorum, quos duæ quævis diametri constituunt cum ordinatis suis, esse in subduplicata ratione reciproca suarum parametrorum.*

Jam enim ostensum est, quod sinus anguli, quem constituit diameter aliqua cum suis ordinatis, sit ad radium in subduplicata ra-

tio-

tione ejus, quam habet parameter axis ad parametrum ejus diametri. Quare, ex æquo perturbando, sinus anguli, quem constituit diameter una cum suis ordinatis, erit ad sinum anguli, quem efficit diameter altera cum ordinatis suis, in subduplicata ratione ejus, quam habet parameter istius ad parametrum illius.

Consequitur demum, *angulum acutum, quem constituit diameter cum ordinatis suis, eo minorem evadere, quo magis ipsa diameter ab axe recedit.*

Nam, ex superius ostensis, parameter diametri eo major evadit, quo magis ipsa diameter ab axe removetur. Sed ei parametro est reciproce proportionale quadratum sinus, quem eadem diameter cum suis ordinatis constituit. Quare per contrarium, tam sinus, quam ipse angulus acutus, ad quem sinus refertur, necesse est, ut eo minor fiat, quo magis diameter recedit ab axe.

FINIS.

INDEX

LIBRORUM, ET CAPITUM,

Quæ in hoc Primo Tomo continentur.

LIBER I.

De Ortu, & Natura Sectionum Conicarum.

LI.

LIBER II.

De Sectionum Conicarum in Plano Descriptione.

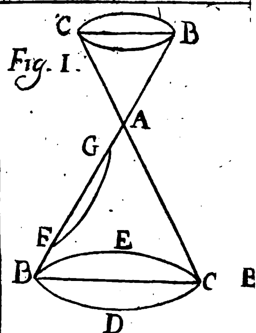
LIBER III.

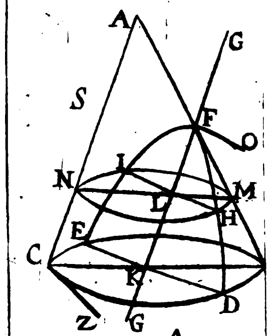
De Conicarum Sectionum Diametris aliis.

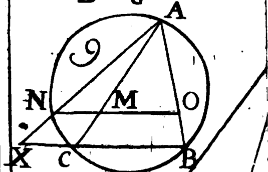
CAP.

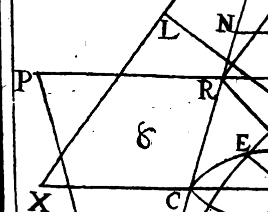
LIBER IV.

De Mutua Diametrorum, Parametrorumque comparatione.

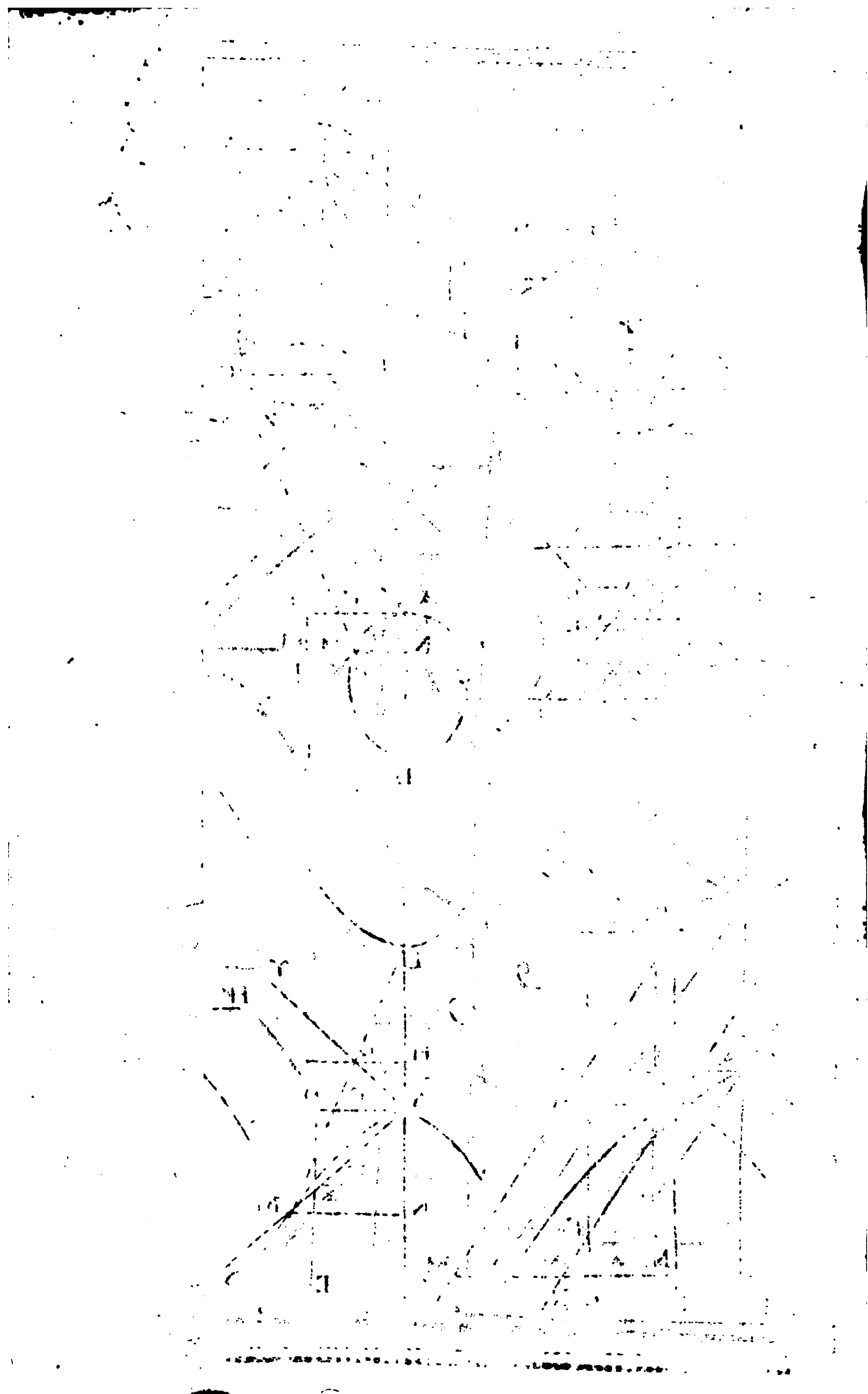


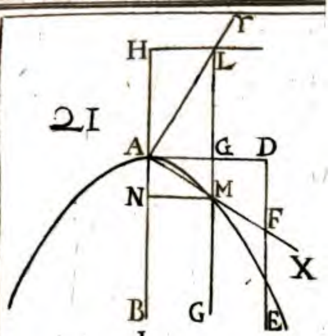


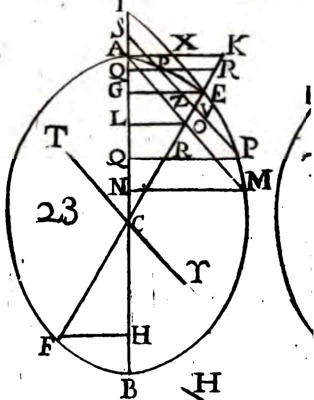


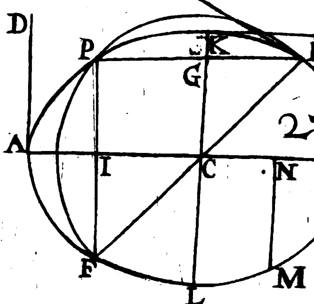


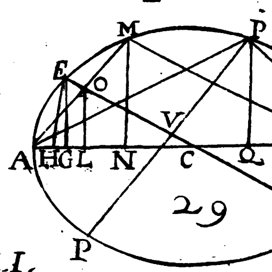
Tom. I. G



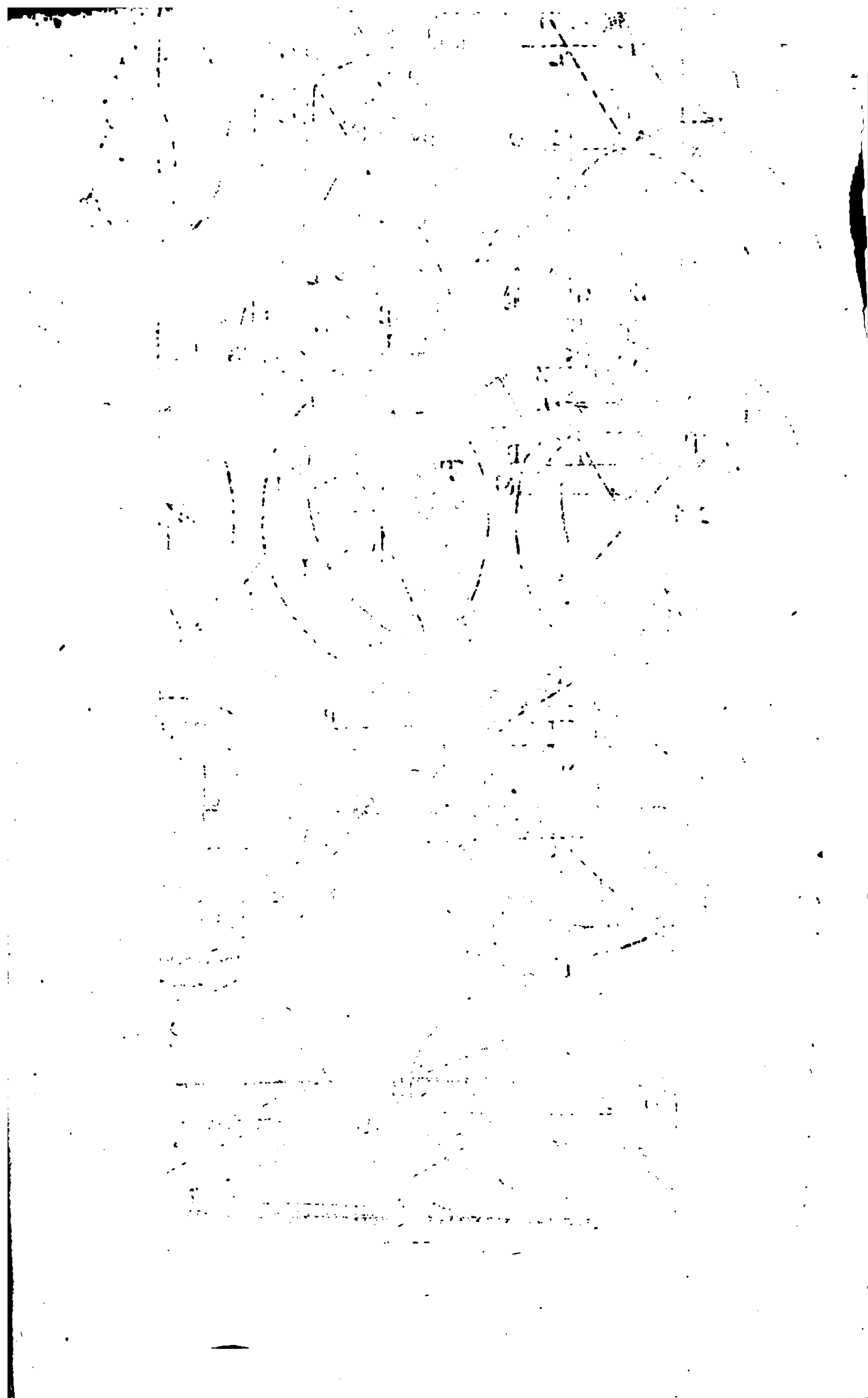

21
H
L
A
G
D
N
M
F
X
B
G
E

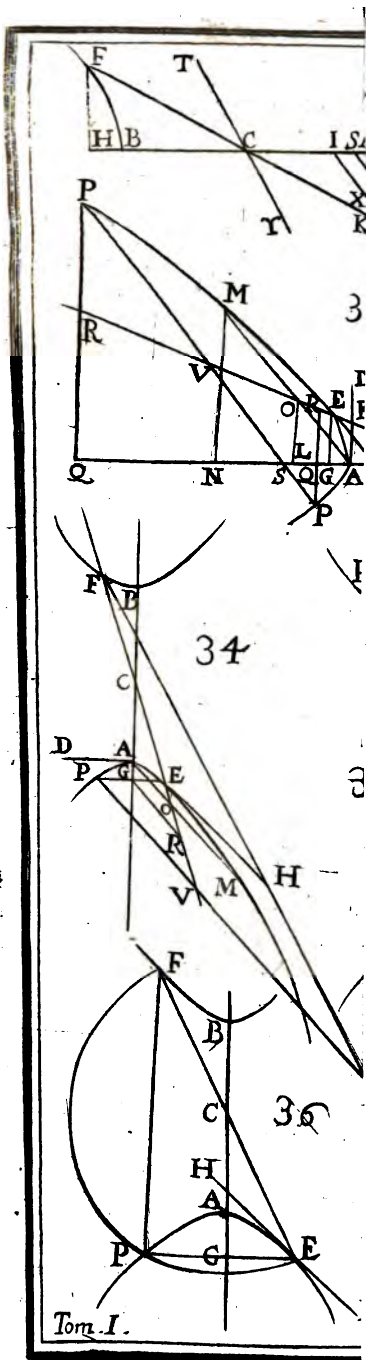

I
S
X
K
A
R
G
E
L
T
P
Q
N
M
23
C
F
H
B

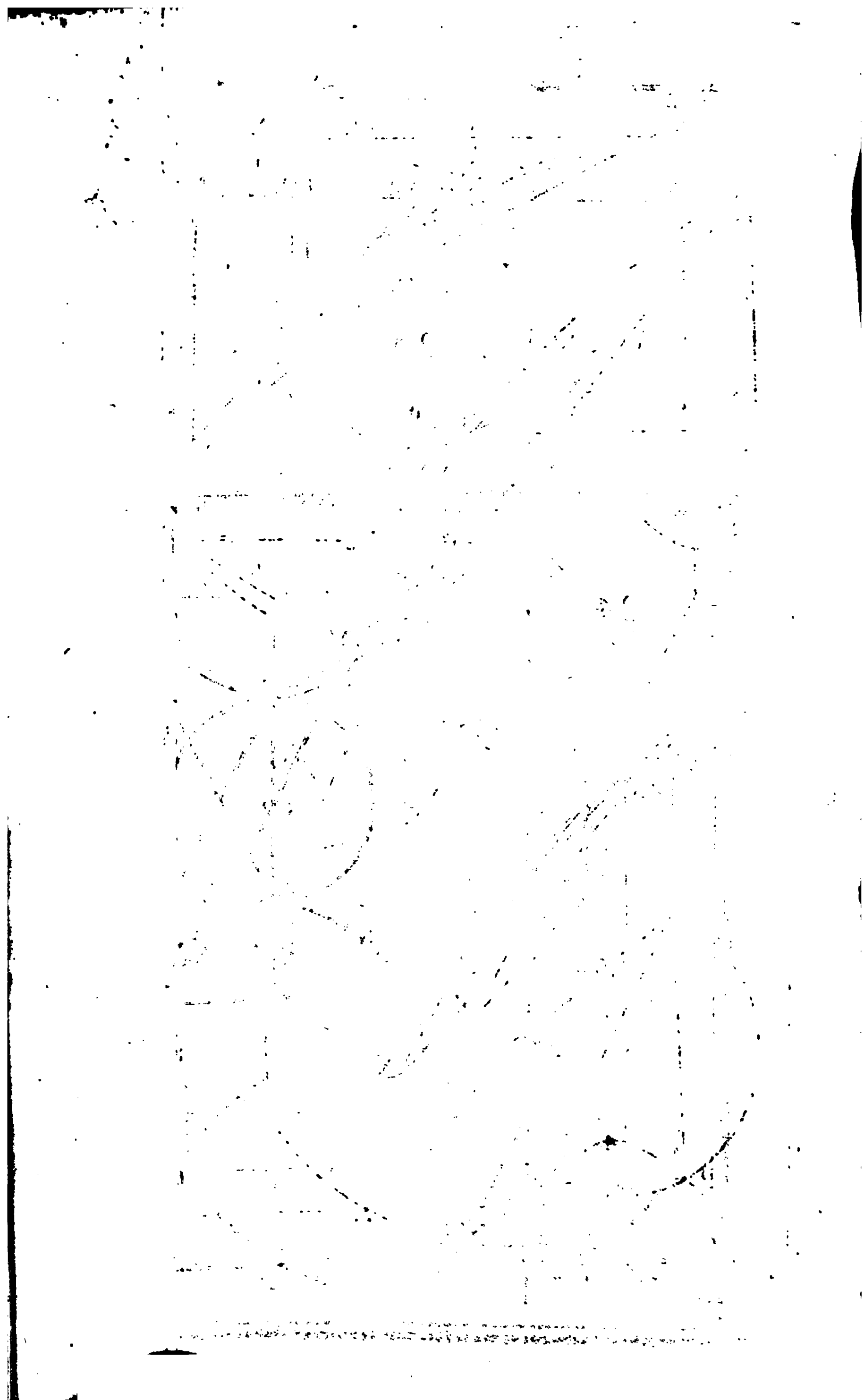

H
D
P
K
G
A
I
C
N
F
L
M

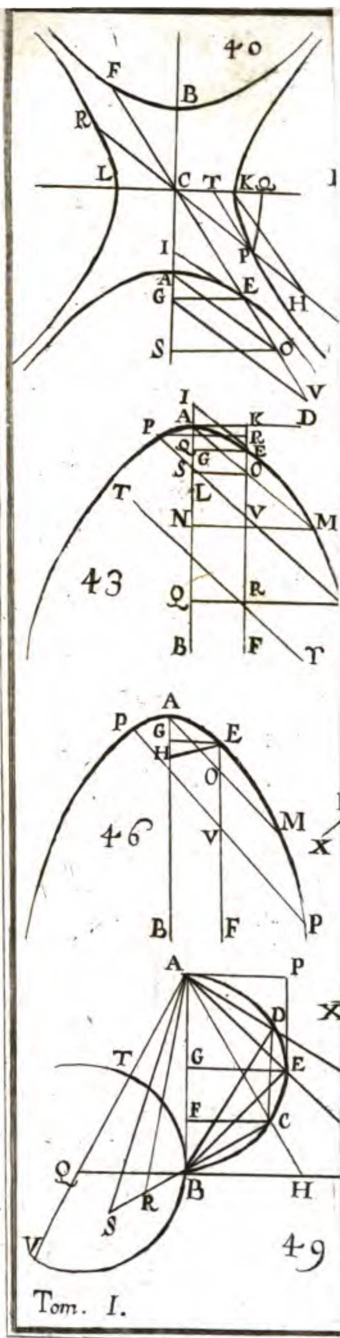

M
P
E
O
V
A
H
G
L
N
C
Q
29
P

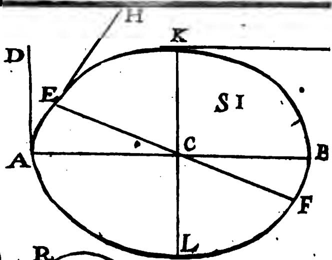
Tom. I.

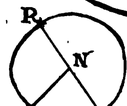


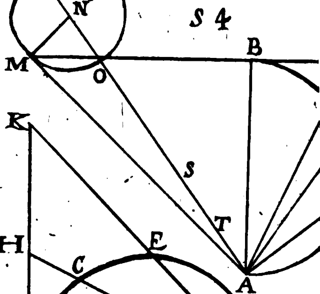

F
T
H
B
C
I
X
K
Y
P
M
R
V
O
R
E
L
Q
N
S
Q
G
A
P
F
B
34
C
D
A
P
G
E
R
H
V
M
F
B
C
36
H
A
P
G
E
Tom. I.

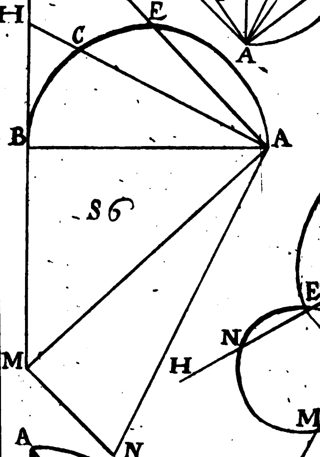


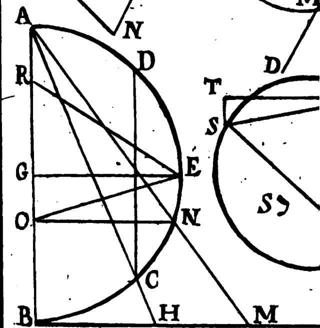

40
43
46
49
Tom. I.



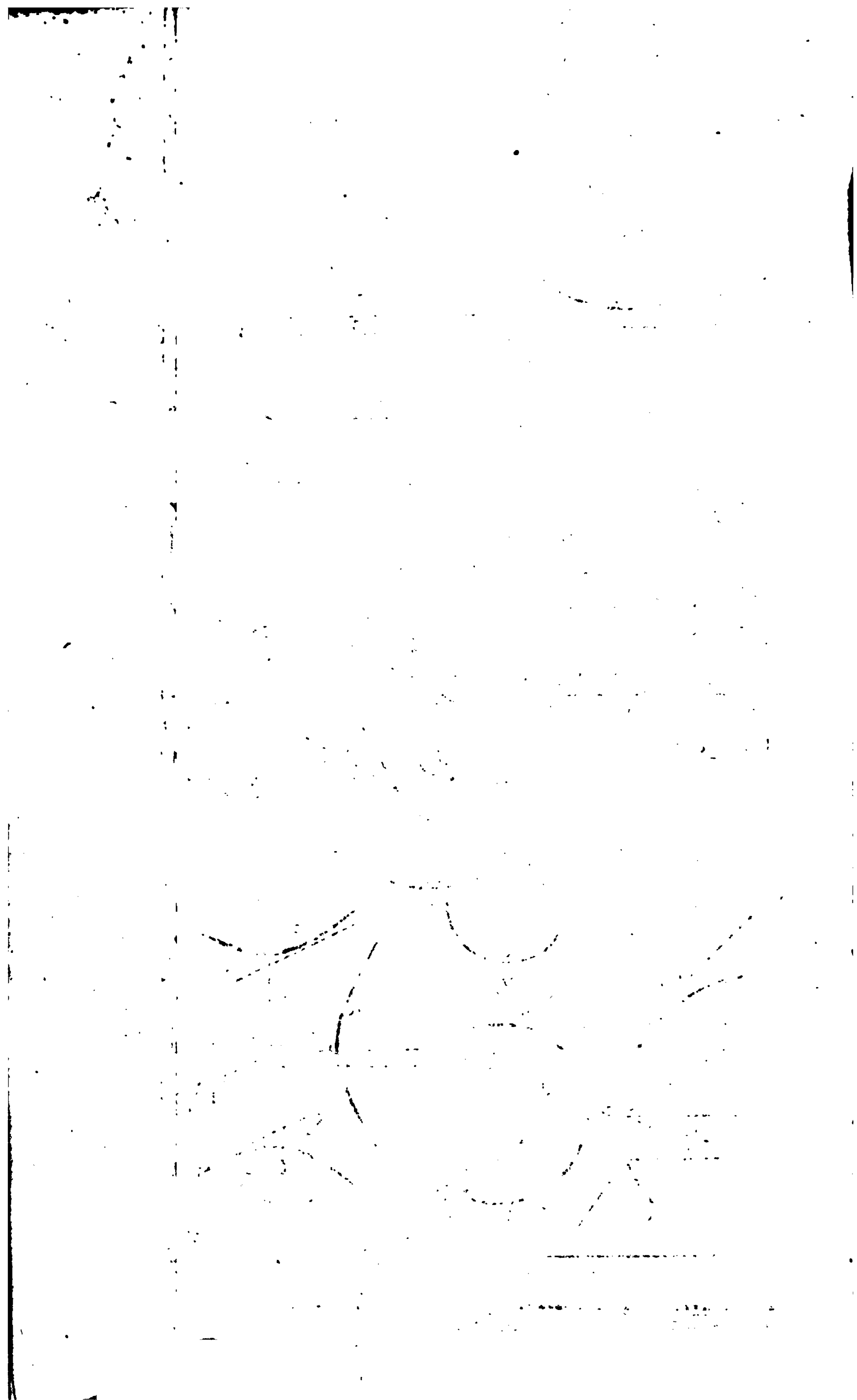


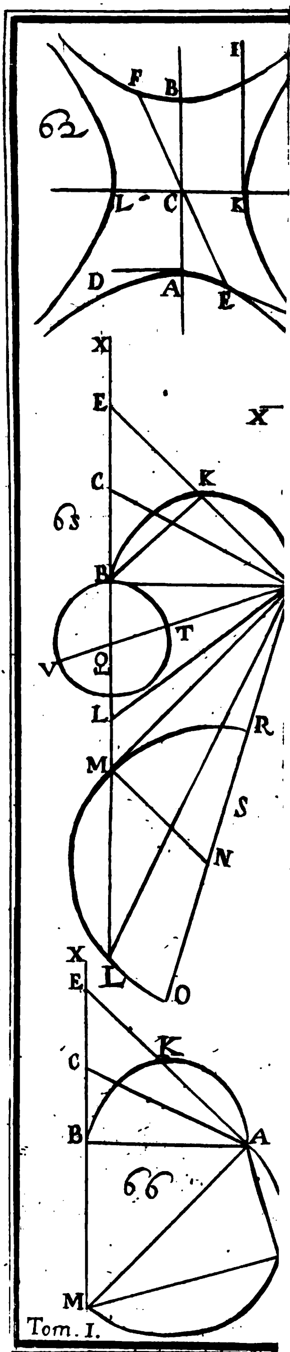






Tom. I.





62
F
B
I
L
C
K
D
A
E
X
E
X
C
K
63
B
T
V
Q
L
R
M
S
N
X
L
O
E
K
C
B
A
66
M
Tom. I.